Dossier : Statistique et probabilités

Les probabilités du Baccalauréat S 1998[1]

Jean-Pierre Grangé[2]

Les nouveaux programmes des classes terminales S. et E.S., applicables à la rentrée 1998 ont fait apparaître l'arbre pondéré comme outil en probabilités avec la petite différence suivante dans les commentaires :
– en E.S. : On introduira les arbres pondérés. On en explicitera les règles de fonctionnement pour leur utilisation comme **outil de calcul**.
– en S. : On introduira les arbres pondérés. On en explicitera les règles de fonctionnement pour leur utilisation comme **outil de démonstration.**

L'arbre pondéré utilisé en probabilités est un registre de représentation comme un autre (ex : le tableau). On exige donc des élèves de S. une démonstration mathématique, éventuellement induite ou facilitée ou préparée par un arbre probabiliste. Regardons comment on pourrait utiliser cet outil sur un exercice du Baccalauréat S. Voici l'énoncé :

Dans tout l'exercice, A *et* B *étant deux événements,* P(A) *désigne la probabilité de* A ; P(B/A) *la probabilité de* B *sachant que* A *est réalisé.*

1. *Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire* X *dont on donne la loi de probabilité :* $p_i = P(X = i)$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

a. Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

(1) Cet article est extrait de la brochure « Arbres et Probabilités » de l'IREM de Besançon, mars 1999.
(2) IREM de Besançon.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. *Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est* 0,7 *; celle qu'il achète du gazole est* 0,3. *Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :*

C_1 : *« en cinq minutes, un seul client se présente » ;*

C_2 : *« en cinq minutes, deux clients se présentent » ;*

E : *« en cinq minutes, un seul client achète de l'essence ».*

a. Calculer $P(C_1 \cap E)$.

b. Montrer que $P(E/C_2) = 0{,}42$ *et calculer* $P(C_2 \cap E)$.

c. En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3. *Soit* Y *la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes. Déterminer la loi de probabilité de* Y.

Dans cet exercice, la solution attendue par l'auteur ne semble pas inclure l'utilisation de schémas. Néanmoins nous allons voir comment un arbre peut aider à la compréhension de la situation aléatoire(3) de cet énoncé. Nous allons constater comment **la construction rigoureuse de l'arbre probabiliste va nous obliger à approfondir et à expliquer en détail les hypothèses du modèle probabiliste choisi pour représenter cette situation**. Cette construction rend inévitable l'explicitation de ce modèle probabiliste, dont il ne faudrait pas, dans l'esprit des programmes actuels, pousser le formalisme trop loin.

En classe, cependant, dans un objectif de formation, il serait bon de regarder, avec les élèves, quels univers peuvent convenir à cette situation concrète. Il y en a qui sont « hors programme » comme ceux formés d'un produit cartésien, mais on peut s'intéresser à l'univers

$$\Omega = \{0,e,g,(e,e),(e,g),(g,e),(g,g)\}$$

où ces issues, lors d'une tranche d'observation de 5 minutes, correspondent à :

0 pour aucun client ne se présente ;

e pour un client se présente et achète de l'essence ;

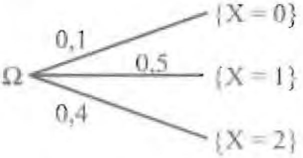
g pour un client se présente et achète du gazole ;

(e,g) pour deux clients se présentent et achètent, dans l'ordre, de l'essence, puis du gazole ;

etc.

(3) Bien sûr, un client ne choisit pas au hasard le type de carburant pour son véhicule. Ici c'est son arrivée dans une station-service qui est considérée comme aléatoire.

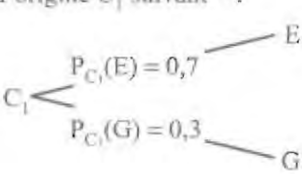
La question 1 étant une question de cours, intéressons-nous aux autres questions, après avoir placé les renseignements donnés dans l'énoncé sur un arbre probabiliste d'origine Ω :



On note :
– E_i l'événement de Ω correspondant à l'événement familier : « en cinq minutes, le i^e client achète de l'essence »,
– G_i pour « en cinq minutes, le i^e client achète du gazole »,
– G pour « en cinq minutes, un seul client achète du gazole »(4).

Pour la question 2 a, on admet que la phrase « Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3 » se traduit dans le modèle probabiliste (Ω,P) par : $P(E_1) = 0,7$ et $P(G_1) = 0,3$.

D'autre part, d'après la description de l'événement familier représenté par E dans le modèle, on a : $P_{C_1}(E) = P(E_1)$; de même pour G : $P_{C_1}(G) = P(G_1)$. Ainsi on obtient l'arbre d'origine C_1 suivant(5) :



La réponse à la question posée est donc :

$$P(C_1 \cap E) = P(C_1) \times P_{C_1}(E) = P(\{X = 1\}) \times P_{C_1}(E) = 0,5 \times 0,7 = 0,35.$$

Pour la question 2 b, c'est un arbre d'origine C_2 qu'il faut considérer. Si on note P′ la probabilité conditionnelle sachant C_2, alors la phrase « Son choix est indépendant de celui des autres clients. » se traduit par :

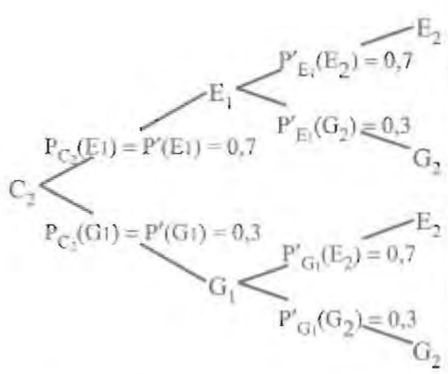
(4) En tant que partie de Ω, ces événements sont respectivement : $E = \{e,(e,g),(g,e)\}$; $E_1 = \{e,(e,g),(e,e)\}$; $E_2 = \{(g,e),(e,e)\}$ et $G = \{g,(e,g),(g,e)\}$; $G_1 = \{g,(g,e),(g,g)\}$; $G_2 = \{(e,g),(g,g)\}$

(5) Des règles de construction et d'utilisation des arbres peuvent être consultées dans [4], p. 21. Dans [1], p. 233, Bernard PARZYSZ distingue des règles de traitement et des règles de conversion.

1°) Comme pour toute épreuve de Bernoulli répétée : $P'_{E_1}(E_2) = P'(E_1)$ et $P'_{E_1}(G_2) = P'(G_1)$, $P'_{G_1}(E_2) = P'(E_1)$ et $P'_{G_1}(G_2) = P'(G_1)$.

2°) De plus, la notion d'indépendance utilisée par l'énoncé conduit à considérer que : $P'(E_1) = P(E_1) = 0{,}7$ et $P'(G_1) = P(G_1) = 0{,}3$.

D'où l'arbre suivant où Y est la variable aléatoire définie dans l'énoncé :



événement-feuille de l'univers C_2 représenté(6)	probabilité P_{C_2} ou P' de cet événement
$E_1 \cap E_2 = \{Y = 2\}$	0,49
$\left.\begin{matrix} E_1 \cap G_2 \\ G_1 \cap E_2 \end{matrix}\right\} = E = \{Y = 1\}$	$\begin{cases} 0{,}21 \\ + \\ 0{,}21 \end{cases}$
$G_1 \cap G_2 = \{Y = 0\}$	0,09

Les réponses aux questions posées sont alors :

Dans ce nouvel espace probabilisé, $(C_2, P_{C_2}) = (C_2, P')$, l'événement E est la réunion des événements disjoints $E_1 \cap G_2$ et $G_1 \cap E_2$ d'où :

$$P_{C_2}(E) = P'(E) = P'(E_1) \times P'_{E_1}(G_2) + P'(G_1) \times P'_{G_1}(E_2)$$
$$= 0{,}7 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}42$$

et

$$P(C_2 \cap E) = P(C_2) \times P_{C_2}(E) = P(\{X = 2\}) \times 0{,}42 = 0{,}4 \times 0{,}42 = 0{,}168.$$

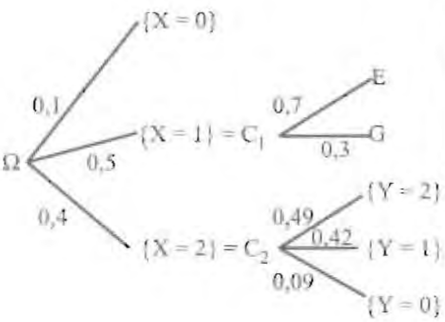
Pour la question 2 c, on écrit :

Dans l'espace probabilisé (Ω, P), l'événement E est la réunion des événements disjoints $C_1 \cap E$ et $C_2 \cap E$ d'où

$$P(E) = P(C_1 \cap E) + P(C_2 \cap E) = 0{,}35 + 0{,}168 = 0{,}518.$$

Pour répondre à la question 3, il est nécessaire d'avoir une vue d'ensemble de cette situation. Celle-ci peut nous être donnée par l'arbre probabiliste suivant. Cet arbre s'obtient en raccordant les deux arbres précédents d'origine C_1 et C_2 à l'arbre d'origine Ω de la première question :

(6) ou encore, trace dans C_2 de l'événement de Ω.



événement représenté	sa probabilité	événement Y réalisé
$X = 0$	0,1	$Y = 0$
$C_1 \cap E$	$0{,}5 \times 0{,}7$	$Y = 1$
$C_1 \cap G$	$0{,}5 \times 0{,}3$	$Y = 0$
$C_2 \cap \{Y = 2\}$	$0{,}4 \times 0{,}49$	$Y = 2$
$C_2 \cap \{Y = 1\}$	$0{,}4 \times 0{,}42$	$Y = 1$
$C_2 \cap \{Y = 0\}$	$0{,}4 \times 0{,}09$	$Y = 0$

Il ne reste plus qu'à justifier pourquoi l'événement $\{Y = 2\}$ est représenté par une seule feuille de cet arbre, d'où la réponse :

$$P(Y = 2) = P(C_2 \cap \{Y = 2\}) = 0{,}4 \times 0{,}49 = 0{,}196.$$

Pour $\{Y = 1\}$, représenté par deux feuilles de cet arbre, la réponse a été donnée à la question 2 c :

$$P(Y = 1) = P(E) = 0{,}518.$$

Et pour $\{Y = 0\}$, on peut le considérer comme événement complémentaire de $\{Y = 1\} \cup \{Y = 2\}$, d'où la réponse :

$$P(Y = 0) = 1 - 0{,}196 - 0{,}518 = 0{,}286.$$

On peut aussi contrôler ce dernier résultat en faisant la somme des probabilités des trois événements-feuilles qui le constituent.

Cette résolution montre que les **arbres probabilistes** sont des supports très pertinents pour organiser des données, s'approprier certains énoncés et élaborer les raisonnements à mettre en œuvre, **en particulier en probabilités conditionnelles**. Ils fournissent une aide très efficace à la compréhension des concepts et à l'assimilation des théorèmes ou formules de probabilités. Il ne faudrait cependant pas abuser des arbres car des élèves pourraient croire que l'objet de l'apprentissage est le mode d'emploi des arbres ; les concepts qu'ils illustrent comme celui de probabilité conditionnelle ne seraient alors pas acquis. Il y aurait évitement de l'obstacle qui ne serait donc pas surmonté comme le signale Michel HENRY dans [5].

Il apparaît donc souhaitable que les élèves sachent utiliser d'autres supports visuels comme les tableaux à double entrée (diagrammes de Carroll) qui ont l'avantage de ne pas être séquentiels. Il semble également souhaitable qu'ils voient l'utilisation des arbres, pondérés ou non, dans d'autres situations, par exemple les dénombrements. L'enseignant doit garder présent à l'esprit que toutes ces représentations, aussi pertinentes et formatrices soient-elles, doivent être passagères pour peu à peu **laisser place à l'écriture formelle des calculs probabilistes**. Elle seule relève d'une compréhension en profondeur des outils probabilistes de base et garantit la validité mathématique des résultats obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COMMISSION inter-IREM « STATISTIQUE ET PROBABILITÉS » (Juin 1997) : *Enseigner les probabilités au lycée.* Publié par le réseau des IREM, éditeur IREM de REIMS.

[2] Arthur ENGEL (1975) : *L'enseignement des probabilités et de la statistique* (adapté de l'allemand), éditions ALÉAS.

[3] Jean-Pierre GRANGÉ (Mai 1996) : *Probabilités conditionnelles et indépendance*. IREM de BESANÇON.

[4] Jean-Pierre GRANGÉ (Mars 1999) : *Arbres et probabilités*. IREM de BESANÇON.

[5] Michel HENRY (Octobre 1994) : *L'enseignement des probabilités : perspectives historiques, épistémologiques et didactiques*. IREM de BESANÇON.

[6] Bernard PARZYSZ (1993) : *Des statistiques aux probabilités : exploitons les arbres.* dans Repères-IREM n° 10.

[7] André TOTOHASINA (1994) : *Introduction du concept de probabilité conditionnelle : avantages et inconvénients de l'arborescence.* dans Repères-IREM n° 15.

Ô MÈTRE, T-AI JE JURÉ MA FOI ?

Alors que la NASA a adopté le système métrique, ses ordinateurs, au quotidien, parlent volontiers encore yard, pied ou pouce… Ainsi se sont-ils adressés à la sonde spatiale Mars Climate Orbiter… pourtant programmée pour des ordres en mètres ! Ce qui lui a valu, fin juin 1999, de s'écraser sur Mars… Adieu 120 millions de dollars ! Adieu deux ans d'observations de 2000 à 2002 !