

Le carrousel de l'équerre

Frédéric Vivien, Thierry Hamel & Luc Sinègre

Introduction

La recherche qui a conduit à la rédaction de la brochure *Quelques problèmes obtenus en faisant tourner une équerre*, s'appuie sur des méthodes qui renvoient à la géométrie, à l'algèbre et à la cinématique. L'article qui suit présente quelques étapes de ces différents itinéraires et aussi quelques croisements.

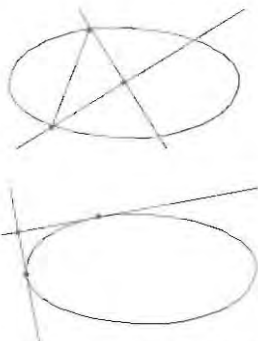
Au départ on retrouve deux exercices classiques,

- faire tourner une équerre au centre d'une conique et rechercher l'enveloppe de l'hypoténuse,
- envelopper la conique par l'équerre et rechercher le lieu du sommet de l'angle droit (cercle orthoptique),

dont la résolution ouvre plusieurs chemins :

- 1^o) modifier certaines hypothèses (en choisissant, par exemple, de ne plus privilégier le centre de la conique) pour obtenir les théorèmes les plus généraux possibles,
- 2^o) trouver des méthodes et des solutions qui fassent ressortir la dualité des situations,
- 3^o) simplifier certaines hypothèses pour construire une série d'exercices élémentaires.

L'étude de plusieurs exercices simples montre le balancement entre les méthodes purement géométriques, qui sortent parfois des programmes (coniques), et les méthodes purement analytiques souvent inutilement compliquées ou encore obscures si l'on omet toute interprétation. Par exemple, la paramétrisation d'une corde d'un cercle vue, à partir d'un point



Ω différent du centre, selon un angle droit amène des calculs inutiles et très compliqués si l'on oublie l'analyse géométrique. La recherche préalable du lieu du milieu de l'hypoténuse permet de trouver une bonne paramétrisation de la corde. Plusieurs exercices aboutissent en outre à l'étude de courbes paramétrées et à la notion d'enveloppe.

Dans un deuxième temps, l'algébrisation du problème utilise des matrices à coefficients complexes et illustre la dualité. Ces notions montrent, sur plusieurs exemples, comment l'opposition géométrique/analytique se transforme en une opposition géométrique/algébrique.

On donne, pour finir, une interprétation cinématique (quand elle est simple, c'est-à-dire lorsque l'on peut faire rouler sans glisser une base orthonormée sur la courbe à étudier) en rappelant que ce problème a été étudié dès le dix-neuvième siècle par Chasles.

Il nous paraît enfin important, de rappeler, alors que toute trace de cinématique a disparu des programmes de Lycée, les rapports que cette branche entretient (depuis l'Antiquité) avec la géométrie. Tous les bons pédagogues savent y revenir quand ils exposent les problèmes de *lieu de points*.

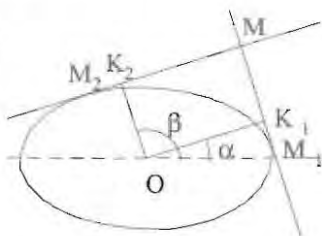
1. Exercices élémentaires

a) Tangente de George Salmon⁽¹⁾

Soit (E) l'ellipse de centre O et de paramètres a et b , d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ dans un repère orthonormé } (O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ du plan.}$$

On mène par un point M extérieur à l'ellipse, deux tangentes orthogonales qui rencontrent (E) en M_1 et M_2 . On appelle K_1 et K_2 les projections orthogonales de O sur ces tangentes. On cherche le lieu des points M.



On note α et β les angles $(\vec{i}, \overrightarrow{OK_1})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OK_2})$. L'idée de la démonstration repose sur le calcul de la distance OM, par application du théorème de Pythagore dans le rectangle OK_1MK_2 .

(1) Nous nous sommes permis d'associer à cette méthode le nom du grand géomètre car une partie de cette méthode figure dans les *Conic Sections*. Mais c'est surtout ici l'occasion d'engager le lecteur à redécouvrir les traités de géométries analytiques du professeur irlandais qui sont à la fois simples, gradués et passionnants.

Toutefois, comme la proposition réciproque est assez délicate à présenter, nous commencerons par énoncer quelques équivalences simples, utiles pour la suite.

Proposition 1 : Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de l'ellipse (E). Une droite D d'équation normale $x \cos \gamma + y \sin \gamma = \rho$ est tangente à l'ellipse (E) en M_0 si et seulement si $\rho x_0 = a^2 \cos \gamma$ et $\rho y_0 = b^2 \sin \gamma$.

En effet, une équation de la tangente en $M_0(x_0, y_0)$ est $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ et la proposition précédente ne fait que traduire la proportionnalité des coefficients de deux équations d'une même droite.

Proposition 2 : Soit D une droite d'équation normale $x \cos \gamma + y \sin \gamma = \rho$, K la projection orthogonale de O sur D et $\gamma = (\vec{i}, \overrightarrow{OK})$. La droite D est tangente à l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si et seulement si $\rho^2 = a^2 \cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma$.

En effet, si D est tangente à (E) en $M_0(x_0, y_0)$, on a $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ et, d'après la proposition précédente, on a $\rho x_0 = a^2 \cos \gamma$ et $\rho y_0 = b^2 \sin \gamma$. L'équation $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ entraîne alors $\frac{a^2 \cos^2 \gamma}{\rho^2} + \frac{b^2 \sin^2 \gamma}{\rho^2} = 1$, c'est-à-dire l'égalité désirée.

Réciproquement, si l'on suppose que $\rho^2 = a^2 \cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma$, on peut introduire le point $N(x_N, y_N)$ tel que $\rho x_N = a^2 \cos \gamma$ et $\rho y_N = b^2 \sin \gamma$. L'égalité $\frac{a^2 \cos^2 \gamma}{\rho^2} + \frac{b^2 \sin^2 \gamma}{\rho^2} = 1$ entraîne $\frac{x_N^2}{a^2} + \frac{y_N^2}{b^2} = 1$, donc le point N appartient à (E). La réciproque de la proposition 1 permet alors de conclure : la droite D est la tangente en N à l'ellipse (E).

Théorème : Le lieu des points M qui regardent l'ellipse (E) d'un angle droit est un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$, appelé *cercle orthotique* de l'ellipse.

Pour démontrer le sens direct, on remarque que, dans le rectangle OK_1MK_2 et avec les notations introduites au début du paragraphe⁽²⁾,

$$\begin{aligned} OM^2 &= OK_1^2 + OK_2^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 \\ &= a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

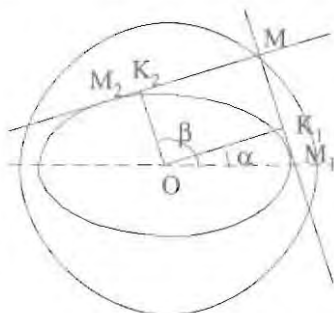
puisque les angles α et β diffèrent d'un droit.

Démonstration de la réciproque : Soit M un point du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$. On peut mener par M (extérieur à (E)) une tangente D à l'ellipse. On appelle M_1 le point de contact et K_1 la projection de O sur D . On construit ensuite le rectangle OK_1MK_2 et, comme précédemment, l'on note α et β les angles $(\vec{i}, \overrightarrow{OK_1})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OK_2})$. Les angles α et β diffèrent donc encore d'un droit.

On a, par Pythagore,

$$\begin{aligned} OK_2^2 &= MK_1^2 = OM^2 - OK_1^2 \\ &= a^2 + b^2 - (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha) \\ &= a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta. \end{aligned}$$

La droite (MK_2) est donc tangente à (E) d'après la réciproque de la proposition 2. Ainsi tout le cercle est décrit.



b) Méthode géométrique

Les démonstrations géométriques dans les cas simples (par exemple dans le cas du cercle orthoptique, ou celui où le sommet de l'équerre se trouve au centre de la conique) reposent sur des propriétés géométriques élémentaires (le symétrique d'un foyer par rapport aux tangentes à la conique décrit le cercle directeur relatif à l'autre foyer) et des études de lignes de niveaux. On retrouve ainsi aisément que la directrice de la parabole est le lieu d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales. Mais dès que l'on prend des hypothèses un peu moins fortes, par exemple si l'équerre ne fait plus 90° ou si son sommet ne coïncide plus avec le centre de la conique, les choses se compliquent. Nous avons choisi de traiter ici le cas où un angle quelconque regarde une parabole pour illustrer ces prolongements. Les méthodes qui

(2) Si l'on veut éviter toute notion sur les équations normales il faudra utiliser

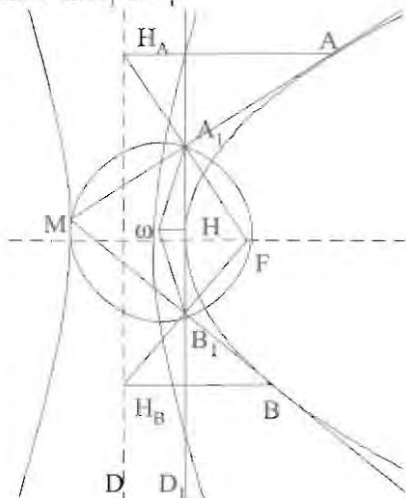
$$d(O, (M_1M)) = OK_1 = \rho_1 = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}$$

traitent le cas le plus général de l'angle droit font appel à un concept géométrique plus sophistiqué, la polarité inverse, et sont les traductions géométriques de méthodes analytiques qui seront vues plus loin.

Ensemble des points qui regardent une parabole avec un angle constant non droit

Par un point M, on a mené deux tangentes à la parabole de foyer F et de directrice D. On appelle A et B les points de contact, H_A et H_B leurs projections sur D, $\overrightarrow{(MA, MB)} = \alpha$, $\alpha \neq 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$. La parallèle D_1 à la directrice menée par le sommet coupe ces tangentes en A_1 et B_1 .

Nous savons que les tangentes sont les médiatrices de $[FH_A]$ et $[FH_B]$ et donc que, par projection du sommet de la parabole, les points A_1 et B_1 sont les pieds de ces médiatrices. Les points M, A_1 , B_1 , F sont cocycliques puisque les angles en A_1 et B_1 sont droits. On a donc $\overrightarrow{(FA_1, FB_1)} = \alpha [\pi]$.



Le centre ω du cercle circonscrit à MA_1F n'appartient pas à la droite (A_1B_1) . On appelle H la projection orthogonale de ω sur la droite (A_1B_1) .

La droite (ωH) est une bissectrice de l'angle $(\omega A_1, \omega B_1)$ puisque le triangle $\omega A_1 B_1$ est isocèle. On a par cocyclicité $\overrightarrow{(\omega A_1, \omega B_1)} = 2\alpha [2\pi]$ et donc $\overrightarrow{(\omega A_1, \omega H)} = \alpha [\pi]$. On a donc

$$\omega H = \omega A_1 |\cos(\omega A_1, \omega H)| = \omega F |\cos(\omega A_1, \omega H)|$$

Finalement (comme $\cos \alpha \neq 0$)

$$\omega F = \frac{1}{|\cos \alpha|} \omega H.$$

Le point ω appartient donc à l'hyperbole Γ de foyer F de directrice (A_1B_1) et d'excentricité $e = \frac{1}{|\cos \alpha|}$ ($e > 1$).

Comme on obtient M par une homothétie h de centre F et de rapport 2, le lieu des points M d'où l'on voit la parabole d'un angle α à π près est l'hyperbole $h(\Gamma)$ de foyer F , de directrice $h(D_1)$ et d'excentricité $\frac{1}{|\cos\alpha|}$.

2. Utilisation des coordonnées tangentielles (Cordes vues du centre d'une ellipse)

Considérons (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Soit (Δ) la droite d'équation cartésienne $ux + vy + w = 0$, qui admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = vt \\ y = -ut - \lambda \end{cases} \quad t \in \mathbf{R} \text{ et } \lambda = -\frac{w}{v}$. Ainsi

$$M \in (\Delta) \cap (E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = vt, \\ y = -ut - \lambda, \\ \frac{(vt)^2}{a^2} + \frac{(ut + \lambda)^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = vt, \\ y = -ut - \lambda, \\ t^2 \left(\frac{v^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} \right) + 2t \frac{u\lambda}{b^2} - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

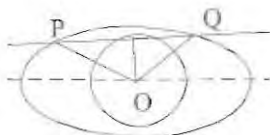
Soient P et Q les points de (E) de paramètres t_1 et t_2 solutions de

l'équation (*). En utilisant $t_1 \cdot t_2 = \frac{\frac{\lambda^2}{b^2} - 1}{\frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{a^2}}$ et $t_1 + t_2 = \frac{-\frac{2u\lambda}{b^2}}{\frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{a^2}}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0 &\Leftrightarrow vt_1 \cdot vt_2 + (-ut_1 - \lambda)(-ut_2 - \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow (u^2 + v^2)t_1 \cdot t_2 + \lambda u(t_1 + t_2) + \lambda^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(u^2 + v^2) \left(\frac{\lambda^2}{b^2} - 1 \right)}{\frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{a^2}} + \frac{\lambda u \left(-\frac{2u\lambda}{b^2} \right)}{\frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{a^2}} + \lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 0 \Leftrightarrow w^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) = u^2 + v^2.$$

On reconnaît l'équation tangentielle d'un cercle de centre O et de rayon $R = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

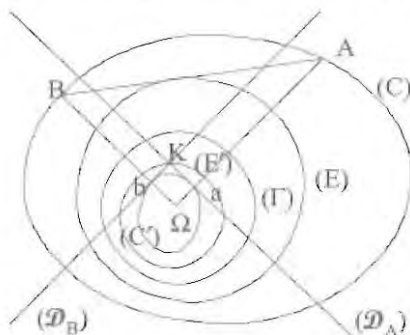


qui est donc l'ensemble recherché.

3. Utilisation de la polarité inverse (Résolution du problème de l'équerre tournante dans l'ellipse)

On considère une fois pour toutes une ellipse (C) , un point Ω dans le plan de l'ellipse de sorte que deux demi-droites orthogonales issues de Ω coupent (C) en deux points A et B . Pour être plus précis et plus simple, on prendra Ω à l'intérieur de (C) et l'angle $A\Omega B$ droit et direct (cf. figure ci-dessous). On recherche inlassablement l'enveloppe des droites (AB) .

On va utiliser un cercle de centre Ω , noté (Γ) , choisi de sorte qu'il soit compris tout entier à l'intérieur de (C) ⁽³⁾, et la polarité inverse par rapport à (Γ) ⁽⁴⁾. Appelons (C') la courbe polaire inverse de (C) : on sait qu'il s'agit d'une conique (c'est le résultat central du développement algébrique qui précède ce chapitre). Compte tenu du choix de (Γ) , on peut même affirmer que (C') est une ellipse ; en effet, toutes les tangentes à (C) sont extérieures à (Γ) , si bien que (C') est bornée par (Γ) .



Les polaires (\mathcal{D}_A) et (\mathcal{D}_B) de A et de B sont, par définition, des tangentes à (C') : or, par construction, les droites (\mathcal{D}_A) et (\mathcal{D}_B) et sont orthogonales à (ΩA) et (ΩB) .

(3) Cette restriction a pour objectif de simplifier la vision des choses. Elle n'entame en rien la généralité du raisonnement qui suit. Plus loin sera étudié le cas où Ω est sur (C) , auquel cas cette restriction n'a plus de sens.

(4) On ne précisera pas, dans la suite, systématiquement « par rapport à Γ » puisqu'aucune confusion ne sera permise.

Donc, comme par ailleurs $(\Omega A) \perp (\Omega B)$, on fait ainsi apparaître un rectangle, disons $\Omega a K b$, où on a noté a (resp b) l'inverse de A (resp B) par rapport à (Γ) , et K l'intersection des droites (\mathcal{D}_A) et (\mathcal{D}_B) . En tant que tel, K est le pôle de la droite (AB) , de sorte que, si (AB) parcourt l'ensemble des tangentes de l'enveloppe recherchée, disons (E) , K parcourt, lui, la polaire inverse de (E) , disons (E') .

Mais on sait que (\mathcal{D}_A) et (\mathcal{D}_B) sont deux tangentes à (C') perpendiculaires ; donc, quand A (et B) parcourent l'ellipse (C) , K parcourt le lieu des points d'intersection des tangentes perpendiculaires à l'ellipse (C') . Ce lieu (il s'agit précisément de (E')) est connu : il s'agit du cercle orthoptique de (C') .

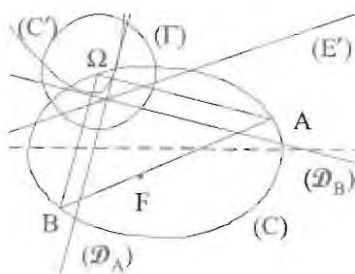
On aboutit à la conclusion suivante : (E) est la polaire inverse du cercle (E') , c'est donc une conique⁽⁵⁾ ! Par souci du détail, on peut identifier la nature exacte de cette conique en cherchant ses points à l'infini. Par construction, on vérifie aisément que Ω est à l'intérieur de l'ellipse (C) ; *a fortiori*, Ω est à l'intérieur de son cercle orthoptique (E') . Par conséquent, aucune tangente à (E') ne passe par Ω et aucun point de (E) n'est envoyé à l'infini : (E) est bien une ellipse !

Il nous est permis d'énoncer finalement : l'enveloppe des droites (AB) , dans le cas où Ω est à l'intérieur (au sens strict) de l'ellipse (C) , est une ellipse.

Remarque : Étude du cas où Ω est situé sur l'ellipse (C) .

La courbe (C') est alors une parabole et non plus une conique à centre. En effet, parmi les tangentes à (C) , il y en a une et une seule qui passe par Ω , à savoir la tangente en Ω ! La polaire inverse (C') a donc un point à l'infini et un seul, c'est donc bien une parabole.

Le « cercle orthoptique » de (C') n'est plus un cercle mais une droite, exactement la directrice de (C') ⁽⁶⁾ ; (E') est cette droite et sa polaire inverse se réduit à un point, son pôle ! L'ensemble (E) se réduit à un point appelé *point de Frégier*, autrement dit les droites (AB) sont concourantes.



(5) ... dont l'un des foyers est Ω !

(6) Résultat élémentaire : la directrice d'une parabole est le lieu des points d'où l'on voit la parabole sous un angle droit.

4. Méthode algébrique complexe

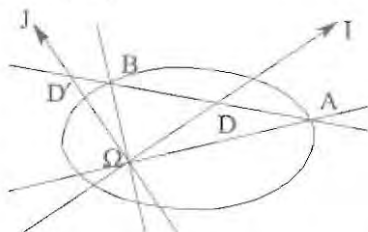
a) La méthode

Soit (E) une conique associée, dans le plan projectif, à la matrice symétrique

$$H = \begin{pmatrix} p & p' & q' \\ p' & q & r' \\ q' & r' & r \end{pmatrix}$$

dans le repère centré en Ω . Une équerre de sommet Ω rencontre la conique en A et B ; l'on recherche l'enveloppe de la droite (AB).

On écrit une équation $ux + vy + wz = 0$ de la droite (AB) (u, v, w sont trois réels). L'idée consiste à traduire l'orthogonalité des droites (ΩA) et (ΩB) , par une relation de conjugaison que l'on saura traiter algébriquement, et ainsi de trouver une équation tangentielle du lieu recherché.



Si l'on désigne par I et J les points cycliques et par Δ la droite (AB) on a :

$$(\Omega A) \perp (\Omega B) \Leftrightarrow [(\Omega A), (\Omega B), (\Omega I), (\Omega J)] = -1,$$

$$(\Omega A) \perp (\Omega B) \Leftrightarrow [(\Omega A) \cap \Delta, (\Omega B) \cap \Delta, (\Omega I) \cap \Delta, (\Omega J) \cap \Delta] = -1,$$

$$(\Omega A) \perp (\Omega B) \Leftrightarrow [A, B, (\Omega I) \cap \Delta, (\Omega J) \cap \Delta] = -1.$$

Finalement les droites (ΩA) et (ΩB) sont perpendiculaires si et seulement si les points D et D' intersections de Δ avec (ΩI) et (ΩJ) sont conjugués par rapport à la conique.

On écrit une équation de $(\Omega I) : y = ix$ et les coordonnées homogènes de D ($-w, -iw, u + iw$). Si le vecteur U' (resp $\overline{U'}$) représente les coordonnées de D (resp D') on a

$$U' = (K_1 + iK_2) U \text{ et } \overline{U'} = (K_1 - iK_2) U.$$

en utilisant les matrices antisymétriques

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La relation géométrique de conjugaison par rapport à (E) se traduit par

$$\overline{U'} \cdot H \cdot U' = 0$$

ou encore par

$${}^tU \cdot (K_1 - iK_2) \cdot H \cdot (K_1 + iK_2) \cdot U = 0.$$

La partie antisymétrique ${}^tK_2 \cdot H \cdot K_1 - {}^tK_1 \cdot H \cdot K_2$ de la matrice n'a aucun effet sur l'équation qui ne dépend donc que de la partie symétrique ${}^tK_1 \cdot H \cdot K_1 + {}^tK_2 \cdot H \cdot K_2$.

On a donc trouvé l'équation tangentielle de la droite (AB) :

$${}^tU \cdot K_1 \cdot H \cdot K_1 + {}^tK_2 \cdot H \cdot K_2 \cdot U = 0.$$

Cette équation peut encore être notée ${}^tU \cdot \Phi(H) \cdot U = 0$ en introduisant l'application :

$$\Phi : \begin{pmatrix} p & p' & q' \\ p' & q & r' \\ q' & r' & r \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -r & 0 & q' \\ 0 & -r & r' \\ q' & r' & -p-q \end{pmatrix}.$$

Exemples

Si la conique possède un centre, sommet de l'angle droit, la matrice H prend alors la forme suivante :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$) et la matrice $\Phi(H)$ de l'équation tangentielle de l'enveloppe de (AB) est :

$$\Phi(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\varepsilon}{b^2}\right) \end{pmatrix}.$$

On trouve donc, dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole avec $a < b$, l'équation tangentielle d'un cercle et dans le cas d'une hyperbole avec $a > b$, le vide.

Si le sommet de l'angle droit est sur la conique, on a avec les mêmes notations :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{\varepsilon}{b^2} & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\varepsilon}{b^2}\right) \end{pmatrix}.$$

L'équation tangentielle est donc $2\alpha uw + 2\beta vw = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\varepsilon}{b^2}\right)w^2$ ou encore $2\alpha u + 2\beta v = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\varepsilon}{b^2}\right)w$ ou $w = 0$. c'est-à-dire celle du faisceau⁽⁷⁾ de droites qui contient le point de coordonnées homogènes :

$$\left(2\alpha, 2\beta, -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\varepsilon}{b^2}\right)\right).$$

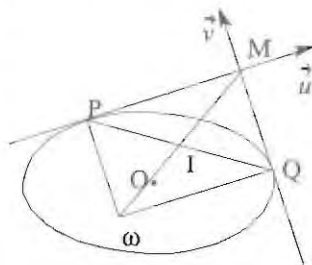
5. Point de vue cinématique

Les démonstrations les plus élégantes concernant ces problèmes relèvent de la cinématique. En effet, avec peu de connaissances supplémentaires (il faut seulement savoir où se trouve le centre instantané de rotation), on allège considérablement les preuves. Nous avons réussi à appliquer ces méthodes qui expliquent d'ailleurs en partie les formules trouvées au 3) dans la plupart des cas. Nous nous bornons ici à expliciter la démonstration de Chasles concernant le cercle orthoptique qui brille par son élégance.

a) Courbe orthoptique de l'ellipse (démonstration de Chasles)

On considère la figure (déjà rencontrée) : (MP) et (MQ) sont deux tangentes perpendiculaires à l'ellipse (C), respectivement en P et Q.

On construit naturellement un repère orthonormal direct (M, \vec{u}, \vec{v}) de sorte que



⁽⁷⁾ Dans le cas d'une hyperbole équilatère, toutes ces droites sont parallèles et le point recherché est à l'infini.

$v = \frac{\overline{PM}}{PM}$ et $v' = \frac{\overline{QM}}{QM}$ et on envisage l'étude du mouvement de ce repère dans

le repère fixe (O, \vec{i}, \vec{j}) .

À un instant t donné de ce mouvement, le centre instantané de rotation se situe sur les normales à chacune des trajectoires de P, Q et M. Or, la vitesse instantanée de P à l'instant t est sur la tangente (PM)⁽⁸⁾ (et respectivement la vitesse instantanée de Q est sur la tangente (MQ)). On a donc les normales recherchées pour P et Q et, à l'intersection de ces normales, le centre instantané de rotation ω .

Compte tenu de l'hypothèse « (MP) et (MQ) perpendiculaires », on obtient un rectangle ωPMQ .

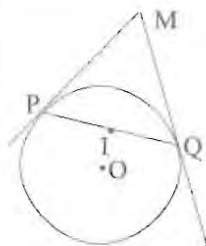
Vérifions que, comme la figure ci-dessus semble l'indiquer, O, ω et M sont alignés. En utilisant le milieu I de [PQ],

– ω, I, M sont alignés puisque ωPMQ est un rectangle !

– O, I, M sont alignés car (PQ) est la polaire de M par rapport à (C).

Plus précisément, on peut voir cet alignement comme le résultat d'une perspective ou d'une affinité de la figure circulaire ci-dessous :

Dans cette figure le rectangle a disparu..., mais, évidemment, O, I, M sont alignés (*axe de symétrie de la figure*). Finalement, O et ω sont tous deux sur la droite (IM). Donc, O est toujours sur la droite (ωM). Cela signifie que O est constamment sur la normale à la trajectoire de M. On en déduit facilement que la trajectoire de M est un cercle de centre O⁽⁹⁾ ! On a retrouvé, par des voies, disons, dynamiques, le cercle orthoptique de l'ellipse (C).



b) Cas d'une conique dégénérée

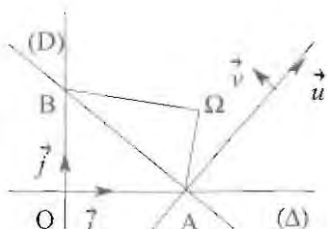
Deux droites perpendiculaires (Δ) et (D) se coupent en O. Ω , un point du plan hors des deux droites, est un sommet d'un triangle rectangle (équerre)

(8) On a intérêt à se méfier tout de même : en effet, on peut voir P comme un point de l'axe (M, u) à distance fixe de M, mais aussi comme un point de l'ellipse (C) se déplaçant avec l'axe en question. Cela dit, dans les deux cas, sa vitesse instantanée est bien sur la tangente (MP) !

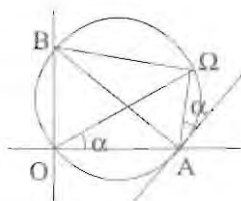
(9) On vient effectivement de démontrer que $\overrightarrow{OM} \frac{dOM}{dt} = 0$, d'où $\frac{dOM^2}{dt} = 0$, c'est-à-dire $OM = c^{ste}$!

ΩAB avec A sur (Δ) et B sur (D) . On fait « tourner l'équerre ΩAB » de sorte que A (resp. B) parcourt (Δ) (resp. (D)). On cherche (sempiternellement) l'enveloppe de la droite (AB) .

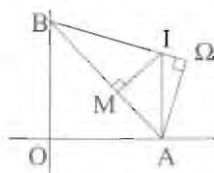
Considérons le repère (A, \vec{u}, \vec{v}) orthonormal direct de sorte que $\vec{v} = \frac{\vec{AB}}{AB}$ (cf figure) mobile dans le repère fixe (O, \vec{i}, \vec{j}) . A parcourt (Δ) , donc, à tout instant, le c.i.r. I du mouvement de (A, \vec{u}, \vec{v}) dans (O, \vec{i}, \vec{j}) est sur la normale à (Δ) passant par A.



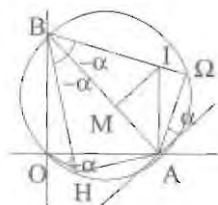
Observons par ailleurs que O, A, Ω et B sont sur le cercle (C) de diamètre $[AB]$ en conséquence de quoi les angles $(\vec{u}, A\Omega)$ et $(\vec{OA}, O\Omega)$ sont égaux à π près (angles inscrits dans (C) interceptant le même arc $A\Omega$). Or $(\vec{OA}, O\Omega) \equiv \alpha [2\pi]$ où α est une constante. On en déduit que la droite $(A\Omega)$ est fixe dans le repère (A, \vec{u}, \vec{v}) et que le c.i.r. I est sur la normale à $(A\Omega)$ en Ω .



I est ainsi à l'intersection de (ΩB) et de la perpendiculaire à (Δ) en A. Le point I nous permet de construire le point caractéristique M de l'enveloppe de (AB) à l'instant considéré, projeté orthogonal de I sur (AB) .



Montrons alors que le point M décrit une certaine parabole de foyer Ω . Pour cela, on peut considérer la similitude σ de centre B qui envoie I sur M. Posons $\sigma(A) = H$. σ est d'angle $-\alpha$ ou $-\alpha + \pi$ car $(\vec{BA}, \vec{B\Omega}) = (\vec{OA}, \vec{O\Omega}) \equiv \alpha [\pi]$.



M est sur le cercle de diamètre $[AB]$ car IMB est rectangle en M. Puisque

- I \rightarrow M,
- B \rightarrow B,
- A \rightarrow H,

AHB est rectangle en M. On en déduit $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Omega} \equiv -\alpha [\pi]$ (par le théorème des angles inscrits dans (C)).

Puisque $\sigma(A) = H$, la droite (OA) a pour image par σ une droite passant par H et faisant un angle de $-\alpha [\pi]$ avec (OA) : il s'agit précisément de (OH).

On a ainsi obtenu :

$$\sigma: \begin{aligned} (OA) &\rightarrow (OH), \\ (IA) &\rightarrow (MH). \end{aligned}$$

$(OA) \perp (IA)$ d'après la construction de I. Donc $(OH) \perp (MH)$: H est le projeté orthogonal de M sur (OH).

Vérifions enfin que $MH = M\Omega$. Cela résulte du fait que (BA) est « axe de symétrie » (par sa bissectrice) intérieure de $(\overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{BH})$ et M est sur (AB), H et Ω sur (C).

Conclusion :

– La droite (OH) est fixe puisque faisant un angle $(-\alpha)$ avec (Δ).

– Ω est fixe par hypothèse.

$MH = M\Omega$ avec H projeté orthogonal de M sur $(OH) = \delta$ signifie que M est sur la parabole de foyer Ω et de directrice δ .

Bibliographie

BERGER (Marcel). *Géométrie* (5 vol.), Paris, Nathan, 1979.

CHASLES (Michel). *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1878, 6.

CHASLES (Michel). *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1861 t. LII.

HAMEL (Thierry). *L'équerre tournante : le cas du cercle dans Aimer faire des mathématiques* t.3, Rouen (Irem), Juin 1996.

HAMEL (Thierry). *Polarité et polarité réciproque dans Aimer faire des mathématiques* t.3, Rouen (Irem), Juin 1996.

HAMEL (Thierry) SINEGRE (Luc) VIVIEN (Frédéric). *Quelques problèmes obtenus en faisant tourner une équerre*, Rouen (Irem), Septembre 1998.