Troisième degré et imaginaires
ou
Comment la recherche des solutions des équations du troisième degré a permis la découverte des nombres imaginaires, l'évolution du statut de ces nombres

Jacques Verdier

Actuellement, dans l'enseignement secondaire, les nombres **négatifs** « apparaissent » dès les premières années de collège, alors que les nombres **complexes** (ou **imaginaires**) sont introduits dans les dernières années de lycée.

L'atelier avait pour but de montrer, en jetant quelques regards sur des documents historiques, la genèse des imaginaires : en étudiant l'histoire de l'apparition de ces nombres, on constate que, d'une part, ils sont « nés » quasi-simultanément, et que, d'autre part, ils sont tout aussi imaginaires (ou tout aussi réels) les uns que les autres.

J'ai commencé l'histoire au début du IX^e^ siècle, à Baghdad, au temps du grand Khalif Al Ma'amoun, des mille et une nuits, de Schéhérazade, du grand vizir… C'est là qu'avec le jeune AL KWARIZMI on situe la naissance de l'algèbre : classification des équations du second degré, et algorithmes algébriques mis en œuvre systématiquement pour les résoudre.

Deux siècles plus tard, 'UMAR AL KHAYYAM tente de résoudre pareillement les équations du troisième degré, mais en vain (il ne réussit à les résoudre que par intersection de coniques). SHARAF AD-DIN AT-TŪSI, au début du XIII^e^ siècle, ne trouvera pas non plus de méthode algébrique pour les résoudre.

C'est à partir de cette résolution des équations du troisième degré que SCIPIONE DEL FERRO, TARTAGLIA, CARDAN et BOMBELLI, passant outre les « interdictions » (c'est à dire utiliser des racines carrées des nombres négatifs), ont utilisé ces nombres « impossibles » pour poursuivre leurs calculs de façon formelle : c'est à ce moment là que l'on pourrait situer **la naissance** des imaginaires.

La jeunesse et l'adolescence de ces nombres, c'est tout le travail de GIRARD à GAUSS, en passant par DESCARTES, D'ALEMBERT et EULER, sur ce qu'on appelle désormais le théorème fondamental de l'algèbre : toute équation polynomiale de degré *n* admet *n* racines. Citons DESCARTES :

> Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnuë a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité (...)
>
> Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours **réelles**, mais quelquefois seulement **imaginaires**, c'est-à-dire que l'on peut toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine…

On ne peut pas dire qu'il y ait eu, au début du moins, un grand enthousiasme pour admettre l'existence de ces nombres…, mais on pouvait calculer avec, de la même façon qu'avec les réels positifs, et cela a permis de résoudre bien des problèmes : les négatifs et les imaginaires avaient au moins l'avantage de l'efficacité (à défaut d'avoir une existence très fondée).

Bien sûr, des difficultés ont surgi, notamment lorsqu'il a fallu définir les logarithmes de ces nouveaux nombres, et une fameuse polémique a opposé LEIBNIZ et BERNOULLI à ce sujet : c'est seulement EULER qui a compris, en 1751, les causes profondes des contradictions qu'ils obtenaient.

Signalons au passage que c'est à l'époque d'EULER que l'on a remplacé le symbole $\sqrt{-1}$ par la lettre **i**.

Le statut des imaginaires a été définitivement fixé par GAUSS en 1825, puis par KRONECKER en 1882 : **C** était enfin construit de façon rigoureuse, et était un corps « algébriquement clos ».

Certains se sont alors « attaqué » à la représentation géométrique des nombres complexes, de L'ABBÉ BUÉE à ARGAND : elle aussi avait ses farouches détracteurs (PONCELET, SERVOIS, PLAYFAIR, GERGONNE…), et c'est GAUSS encore qui se rendit compte de l'importance de la dimension 2 dans ce problème :

> ... de même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un **plan** indéfini, où chaque point représenté par son abscisse a et son ordonnée b représente en même temps la quantité $a + b\mathbf{i}$.
>
> Le passage continu d'une valeur $a + b\mathbf{i}$ à une autre se fait par conséquent en suivant une ligne, et peut donc s'effectuer d'une infinité de manières.
>
> Lettre de GAUSS à BESSEL (1811)

On pourrait croire qu'après GAUSS et CAUCHY l'histoire était enfin terminée… C'était sans compter sur des mathématiciens comme HAMILTON, qui essayèrent de construire une sur-algèbre de **R** en dimension trois (ce qui s'est révélé impossible), puis en dimension quatre : c'est le fameux corps des quaternions (où il a fallu abandonner la commutativité de la multiplication), dont **C** est une sous-algèbre (commutative) de dimension deux, et **R** une sous-algèbre de dimension un.

BIBLIOGRAPHIE

A. DAHAN-DALMEDICO et J. PEIFFER, *Une histoire des mathématiques : routes et dédales*, Éditions SEUIL. Collection POINTS. 1986.

Noreddine MOHAMMED, *Sur la résolution des équations algébriques*, I.R.E.M. de l'Université de Lille. Villeneuve d'Ascq. 1995.

Jacques VERDIER, *Troisième degré et imaginaires*. Publication de la Régionale Lorraine de l'A.P.M.E.P., 1997.

Compléments dans :

Article de Jean-Luc VERLEY : *La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* dans *Fragments d'histoire des mathématiques*, tome 1, brochure de l'A.P.M.E.P. n° 41, 1981.

A.P. YOUSKEVITCH, *Les mathématiques arabes. VII^{e}-XV^{e} Siècles*. Éditions VRIN, Paris, 1976

DESCARTES, *La géométrie*, 1637, Rééditions : Hermann 1886, Gabay 1991 (notations contemporaines).

Trois articles d'Ahmed DJEBBAR, Jean-Pierre BOUDINE, et Jonas LÉVY dans « SCIENCES & VIE JUNIOR », numéro spécial « Équations du second degré », décembre 1998.