Sur le manche de ma guitare…

Michel Rodriguez

Cet atelier a permis d'explorer en une heure trente les liens étroits qui se sont tissés dès l'origine entre la musique et l'arithmétique.

Partant des considérations physiques que sont les harmoniques ou la résonance, et de considérations psycho-sociologiques comme la sensation d'unisson, l'exposé a présenté la naissance puis l'évolution des gammes musicales comme un compromis permanent entre :
- la « naturalité » de la gamme, qui revient à admettre comme notes les fréquences multiples entiers d'une fréquence déjà admise, c'est-à-dire, pour résumer, que les harmoniques sont « naturellement en harmonie » avec la fréquence fondamentale…
- la « transposabilité » de la gamme. On veut qu'un décalage dans la gamme fournisse les même intervalles, de manière à pouvoir jouer une même pièce sur des instruments à tessiture différentes.

Il a fallu se convaincre que ces deux objectifs sont incompatibles et constater ensuite que le choix des fréquences composant la gamme a, de tout temps, été tributaire de la notion de nombre utilisée.

Pythagore ne connaît que les nombres entiers et sait travailler sur les rapports de nombres entiers : son échelle musicale sera donc rationnelle et basée sur la quinte juste (rapport de fréquences égal à 3/2) de manière à ce que la seconde (octave) et la troisième harmonique (quinte) soient automatiquement dans la gamme.

Zarlino ira plus loin dans la naturalité puisqu'il ajoute l'harmonique de rang 5 en remplaçant le diton pythagoricien (tierce majeure, rapport 81/64) par le diton zarlinien (rapport 5/4… soit 80/64).

Mais cela nuit à la transposabilité car il en vient ainsi à briser la notion de ton. Le ton pythagoricien correspondait au rapport 9/8, on le trouvait entre do et ré, entre ré et mi, entre fa et sol, entre sol et la et entre la et si… Pour

Zarlino, l'intervalle do/ré n'est pas le même que l'intervalle ré/mi… Difficile d'accorder un instrument pour jouer dans une telle gamme.

En 1693, Werckmeister présente son modèle de gamme tempérée. Le principe : on sacrifie la naturalité de la gamme au delà de la seconde harmonique, mais on décide que les intervalles doivent être égaux entre deux notes consécutives de la gamme pour parvenir à la transposabilité absolue.

Les fréquences admises nécessitent le passage par les irrationnels. En l'occurrence, le demi-ton tempéré correspond à un rapport de $2^{1/12}$… Pythagore pouvait difficilement imaginer cela dans le cadre de la théorie des proportions.

Au passage, on rencontre le nombre : $2^{\frac{4}{12}} = \sqrt[3]{2}$ qui correspondrait à la tierce majeure tempérée.

Ce nombre avait posé suffisamment de problèmes pour la duplication du cube. Il est amusant de constater que la construction géométrique à la règle et au compas de l'échelle musicale tempérée est équivalente à ce fameux problème de l'antiquité grecque. On peut aussi dire en souriant qu'un excellent musicien peut dupliquer le cube… à l'oreille !

Cet atelier retraçait en le commentant l'article du même titre et du même auteur à paraître dans les Actes des Journées académiques sur le NOMBRE, organisées par l'IREM de Lille (collection Ellipses).