La beauté du calcul barycentrique vu par les équilibres

Gildas Le Hir

Le barycentre G de la famille (A_i, α_i) $(1 \leq i \leq n)$ s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

(évidemment avec la condition : $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq 0$) et donne la relation fondamentale : pour tout point M,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG},$$

soit :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} + \left(-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG} = \vec{0}\ .$$

Cette relation peut être résumée dans un tableau (dit d'équilibre) présenté sous la forme :

A_1	A_2	A_3	…	A_n	G
α_1	α_2	α_3	…	α_n	$-\alpha_1 - \ldots - \alpha_n$

Tout tableau du type :

A_1	A_2	A_3	…	A_n
α_1	α_2	α_3	…	α_n

où les A_i sont des points et les α_i sont des réels tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0$, est alors appelé un **tableau d'équilibre** associé à l'équation :

pour tout point M, $\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$.

Il peut être interprété sans problème, si les conditions sont remplies, sous forme barycentrique. Par exemple, le tableau

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
3	–2	1	2	–4

donne : pour tout M,

$$3\overrightarrow{MA_1} - 2\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + 2\overrightarrow{MA_4} - 4\overrightarrow{MA_5} = \vec{0}$$

qui peut s'écrire

$$4\overrightarrow{MA_5} = 3\overrightarrow{MA_1} - 2\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + 2\overrightarrow{MA_4}$$

et peut se lire, compte tenu de $(4 = 3 - 2 + 1 + 2)$: A_5 est le barycentre de $(A_1,3)$, $(A_2,-2)$, $(A_3,1)$, $(A_4,2)$.

Quelques règles sur les tableaux d'équilibre

• Tout point apparaissant avec le coefficient 0 peut être supprimé sans changer l'équilibre.
• Toute combinaison linéaire de tableaux d'équilibre est un tableau d'équilibre.
• Un tableau d'équilibre réduit à deux points affectés de coefficients non nuls (opposés) indique que ces deux points sont confondus.

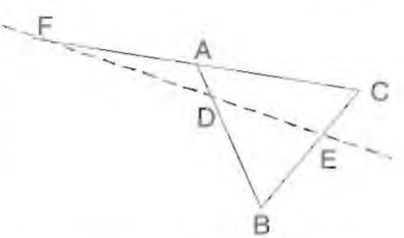
Équilibre de trois points:

A	B	C
a	b	c

avec $a + b + c = 0$, et a, b, c tous non nuls, peut être interprété comme A barycentre de (B,b) et (C,c) ou bien B barycentre de (A,a) et (C,c) ou bien C barycentre de (A,a) et (B,b). Il traduit l'alignement des trois points A, B et C.

Exercice

Soit ABC un triangle, D le barycentre de (A,3) (B,1), E celui de (B,2) (C,3) et F celui de (A,–2) (C,1). Montrer que D, E et F sont alignés et préciser les positions respectives.



On écrit les trois équilibres correspondant aux données barycentriques

(1)

D	A	B
–4	3	1

(2)

E	B	C
–5	2	3

(3)

F	A	C
1	–2	1

La combinaison linéaire $2 \times (1) - (2) + 3 \times (3)$ donne le résultat attendu.

Théorème de Ménélaüs

Soit ABC un triangle, M, N et P trois points situés respectivement sur (AB), (BC), et (CA) et distincts de A, B et C. Les points M, N et P sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{\mathrm{MB}}}{\overline{\mathrm{MA}}} \times \frac{\overline{\mathrm{NC}}}{\overline{\mathrm{NB}}} \times \frac{\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{PB}}} = 1 \ .$$

Démonstration.

Soit M barycentre de (A,a) et (B,1–a), N barycentre de (B,b) et (C,1–b), P barycentre de (C,c) et (A,1–c). Les réels a, b et c sont supposés non nuls et tous distincts de 1 (sinon, on se positionne sur l'un des sommets du triangle ABC).

On peut écrire les tableaux d'équilibre suivants :

(1)

M	A	B
-1	a	$1-a$

(2)

N	B	C
-1	b	$1-b$

(3)

P	C	A
-1	c	$1-c$

On élimine B avec les deux premiers tableaux en utilisant la combinaison $b \times (1) - (1-a) \times (2)$, on obtient le tableau (4) :

M	A	N	C
$-b$	ab	$1-a$	$-(1-a)(1-b)$

On élimine alors A en utilisant la combinaison $ab \times (3) - (1-c) \times (4)$, on obtient le tableau (5) :

M	N	P	C
$(1-c)b$	$-(1-c)(1-a)$	$-ab$	$abc+(1-a)(1-b)(1-c)$

Les trois points M, N et P sont alignés si et seulement si on peut trouver un équilibre sur ces trois points, donc, d'après ci-dessus, si et seulement si :

$$abc + (1-a)(1-b)(1-c) = 0$$

soit :

$$\frac{abc}{(1-a)(1-b)(1-c)} = -1 \ .$$

Or nous avons :

$$a\overline{\mathrm{MA}} + (1-a)\overline{\mathrm{MB}} = 0 \ ,$$

donc :

$$\frac{\overline{\mathrm{MB}}}{\overline{\mathrm{MA}}} = -\frac{a}{(1-a)} \ .$$

Et, de même :

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} = -\frac{b}{(1-b)}$$

et

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = -\frac{c}{(1-c)} .$$

On a alors :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = -\frac{abc}{(1-a)(1-b)(1-c)} = 1 .$$

Le résultat attendu est ainsi obtenu.

Équilibre de quatre points

A	B	C	D
a	b	c	d

($a + b + c + d = 0$, et a, b, c, d tous non nuls)

• Ce tableau peut être interprété comme A barycentre de (B,b) (C,c) (D,d) ou bien B barycentre de (A,a) (C,c) (D,d) ou bien …

• Il traduit dans l'espace la coplanarité des quatre points.

• De plus si, par exemple, $a + b \neq 0$, alors en utilisant le barycentre (partiel) G de (A,a) et (B,b), on obtient qu'il est alors aussi barycentre de (C,c) et (D,d) et donc le point d'intersection des droites (AB) et (CD) est immédiatement lisible dans le tableau (ainsi que d'autres intersections).

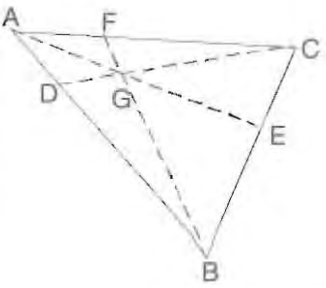
• Et, si $a + b = 0$, alors $c + d = 0$ et l'on obtient que (AB) et (CD) sont parallèles !

Exercices

1. Que représente l'équilibre suivant ?

A	B	C	D
1	−1	1	−1

2. Soit ABC un triangle, D le barycentre de (A,3) et (B,1), E celui de (B,2) et (C,3) et F celui de (A,2) et (C,1). Montrer que (AE), (BF) et (CD) sont concourantes et préciser le point de concours G comme barycentre de A, B et C.



On écrit les trois équilibres correspondant aux données barycentriques.

(1)

D	A	B
–4	3	1

(2)

E	B	C
–5	2	3

(3)

F	A	C
–3	2	1

La combinaison linéaire $2 \times (1) - (2)$ donne le tableau suivant :

D	A	E	C
–8	6	5	–3

On définit alors G comme barycentre de (A,6) et (E,5) ; il est aussi barycentre de (C,3) et (D,8). G est donc l'intersection de (AE) et (CD) ; il reste à vérifier que G est aussi sur (BF).

On peut écrire le tableau obtenu par la combinaison linéaire $(2) - 3 \times (3)$:

E	B	F	A
–5	2	9	–6

On obtient alors que G est barycentre de (B,2) et (F,9) et les droites (AE), (BF) et (CD) sont donc concourantes en G.

On peut écrire et combiner ensuite quelques équilibres pour obtenir un équilibre sur les quatre points A, B, C et G qui permet de lire que G est barycentre de (A,6), (B,2) et (C,3).

Théorème de Céva

Soit ABC un triangle, M, N et P trois points situés respectivement sur (AB), (BC) et (CA) et distincts de A, B et C. Les droites (CM), (AN) et (BP) sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = -1 .$$

Démonstration

En prenant les mêmes notations et hypothèses que pour le théorème de Ménélaüs ci-dessus :

(1)

M	A	B
–1	a	$1-a$

(2)

N	B	C
–1	b	$1-b$

(3)

P	C	A
–1	c	$1-c$

On élimine B avec les deux premiers tableaux en utilisant la combinaison $b \times (1) - (1-a) \times (2)$, on obtient le tableau (4) :

M	A	N	C
$-b$	ab	$1-a$	$-(1-a)(1-b)$

Si $ab + (1-a) \neq 0$, on peut définir G comme barycentre de (A,ab) et (N,$1-a$), mais il est aussi barycentre de (C,$-(1-a)(1-b)$) et (M,$-b$). G appartient à la droite (BP) si l'on peut obtenir un équilibre avec les trois points G, B et P.

On introduit le tableau (5) :

G	A	N
$-1+a-ab$	ab	$1-a$

La combinaison linéaire $c(1-a) \times (2) - (1-a)(1-b) \times (3) + c \times (5)$ permet d'éliminer N et C et d'obtenir l'équilibre :

B	P	G	A
$bc(1-a)$	$(1-a)(1-b)$	$-c+ac-abc$	$-(1-a)(1-b)(1-c)+abc$

On peut alors conclure que G appartient à (BP) si et seulement si :

$$abc - (1-a)(1-b)(1-c) = 0$$

L'interprétation faite pour le théorème de Ménélaüs de cette relation donne le résultat attendu.

Si $ab + (1-a) = 0$, les droites (AN) et (CM) sont parallèles : le cas de figure donné par le théorème de Céva se transforme en parallélisme des trois droites. Par la même démarche, on a (CM) et (BP) parallèles si : $ca + (1-c) = 0$. Ces égalités peuvent être lues $b = 1 - \frac{1}{a}$ et $c = \frac{1}{1-a}$. On obtient alors

$$abc = a \times \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times \left(\frac{1}{1-a}\right) = -1$$

et

$$(1-a)(1-b)(1-c) = (1-a) \times \left(\frac{1}{a}\right) \times \left(-\frac{a}{1-a}\right) = -1 .$$

Réciproquement, si l'on a : $ab + (1-a) = 0$ et $abc = (1-a)(1-b)(1-c)$, on obtient alors que nécessairement on a : $ca + (1-c) = 0$, ce qui signifie que les droites (CM) et (BP) sont parallèles.

Le théorème de Céva est ainsi établi.

Un prolongement dans l'espace

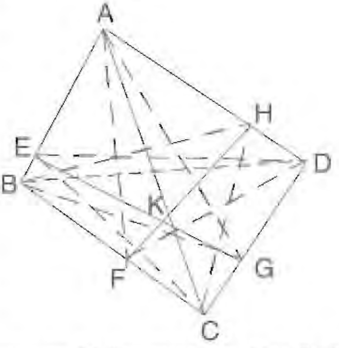
On considère un tétraèdre ABCD et quatre points E, F, G et H définis par : E barycentre de (A,a) et (B,$1-a$), F barycentre de (B,b) et (C,$1-b$), G barycentre de (C,c) et (D,$1-c$), H barycentre de (D,d) et (A,$1-d$), a, b, c et d étant des réels tous non nuls et différents de 1.

Le but de la recherche est de trouver une CNS sur a, b, c et d pour que :
1) les quatre points E, F, G et H soient coplanaires.
2) les quatre plans (ECD), (FDA), (GAB), et (HBC) aient au moins un point commun.

On écrit les quatre équilibres correspondant aux données barycentriques, on cherche ensuite à obtenir un équilibre avec les quatre points E, F, G et H, en éliminant successivement les points A, C et B. La condition nécessaire et suffisante pour obtenir la coplanarité des points E, F, G et H s'obtient alors en annulant le coefficient du point restant (D dans la démarche proposée) dans le dernier tableau obtenu. On trouve que la CNS cherchée est :

$$abcd - (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) = 0.$$

Il est alors clair que, si la condition ci-dessus est remplie et si les droites (EG) et (HF) sont sécantes en K, ce point appartient aux quatre plans de la question 2 (voir figure ci-contre pour mieux cerner cette affirmation) ! Réciproquement si les quatre plans ont un point commun K, ce point est sur l'intersection de (ECD) et (GAB) d'une part et sur celle de (FDA) et (HBC) d'autre part, soit sur (EG) et sur (FH). Les droites (EG) et (FH) étant sécantes en K, les quatre points E, F, G et H sont coplanaires et la CNS obtenue précédemment est encore valable.



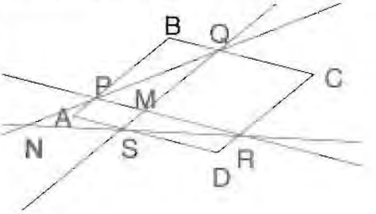
L'équilibre obtenu sur E, F, G et H permet de caractériser le cas du parallélisme de (EG) et (FH) par la condition supplémentaire :

$$cb + (1-a)(1-b) = 0\ .$$

Un problème de lieu

On considère un parallélogramme ABCD. Un point M intérieur à ce quadrilatère se projette en S sur (AD) et en Q sur (BC) suivant la direction (AB) et en P sur (AB) et en R sur (CD) suivant la direction (AD). Soit N le point d'intersection (quand il existe !) des droites (SR) et (PQ).

Quel est le lieu de N lorsque M se balade dans le parallélogramme ?



Ce problème a été proposé lors d'un stage TI à propos de l'utilisation du module Cabri-Géomètre de la TI 92 (avec d'ailleurs l'hypothèse ABCD rectangle qui n'apporte rien au problème). L'étude du lieu faite avec ce logiciel fait apparaître un résultat troublant…

L'utilisation d'équilibres donne une réponse fort satisfaisante et même permet l'étude pour tout point M du plan !

Vu la construction, on peut affirmer que M est entièrement déterminé par la donnée de P et de S (repérage dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, et que les coordonnées barycentriques de P dans (A,B) sont les mêmes que celles de R dans (D,C), et celles de Q dans (B,C) sont les mêmes que celles de S dans (A,D).

Pour répondre à la question, on cherche un équilibre entre les quatre points P, Q, R et S pour caractériser N et pouvoir conclure.

On peut donc écrire les équilibres suivants :

(1)

P	A	B
-1	a	$1-a$

(2)

Q	B	C
-1	b	$1-b$

(3)

R	D	C
-1	a	$1-a$

(4)

S	A	D
-1	b	$1-b$

On élimine B dans les deux premiers tableaux par la combinaison $b \times (1) - (1-a) \times (2)$:

P	A	Q	C
$-b$	ab	$1-a$	$-(1-a)(1-b)$

(5)

On élimine D dans les deux autres tableaux par la combinaison $(1-b) \times (3) - a \times (4)$:

R	C	S	A
$-(1-b)$	$(1-a)(1-b)$	a	$-ab$

(6)

La combinaison (5) + (6) s'écrit alors :

R	P	Q	S
$-(1-b)$	$-b$	$1-a$	a

Si $1 - a - b \neq 0$, on peut affirmer que le point N barycentre de $(P,-b)$ et de $(Q,1-a)$ est le point d'intersection des droites (PQ) et (SR) : N est aussi barycentre de (S,a) et $(R,b-1)$.

On écrit l'équilibre associé :

N	P	Q
$a+b-1$	$-b$	$1-a$

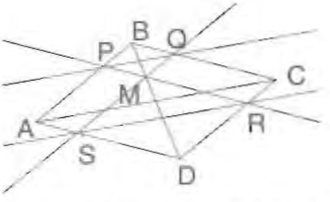
(7)

La combinaison $-b \times (1) + (1-a) \times (2) + (7)$ permet d'éliminer P et Q, mais aussi (par magie !) le point B :

A	C	N
$-ab$	$(1-a)(1-b)$	$a+b-1$

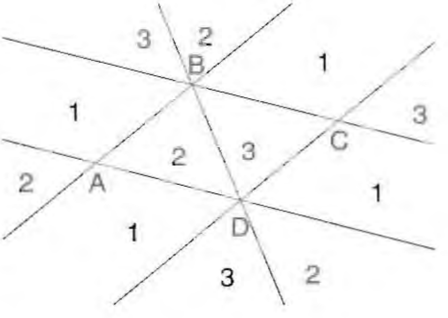
Donc N est aligné avec A et C !

Si $1 - a - b = 0$, les droites (PQ) et (SR) sont parallèles : N est envoyé à l'infini. On doit remarquer que, dans le repère $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, l'équation $1 - a - b = 0$ est celle de la droite (BD) et, si M est sur cette droite (BD), on a par construction (PQ) et (SR) parallèles à (AC) ; on peut conclure que N est envoyé à l'infini sur (AC).



On peut ensuite étudier la position de N sur la droite (AC) : elle est donnée par les signes respectifs de $(-ab)$ et de $(1-a)(1-b)$.

Le dessin suivant résume les résultats, les zones délimitées par les droites (AB), (BC), (CD), (DA) et (BD) sont numérotées :
zone 1 : N appartient au segment [AC]
zone 2 : N appartient à la demi-droite d'origine A ne contenant pas C
zone 3 : N appartient à la demi-droite d'origine C ne contenant pas A



Bibliographie

T. Hamel, F. Lachaux, L. Sinègre. *Équilibres et barycentres associés*. IREM de Rouen.
T. Hamel, F. Lachaux, L. Sinègre. *Équilibres et barycentres complexes*. IREM de Rouen.