Exemples de démonstration en mathématiques chinoises

Arnaud Gazagnes

Un fragment d'histoire des mathématiques...

Le mathématicien Hardy écrivait: « Les mathématiques grecques sont seules vraies ». Pour nous, héritiers de la rigueur d'Euclide mise en avant dans ses *Éléments*, il est difficile de concevoir une mathématique dépourvue de définitions, d'axiomes, de raisonnements hypothético-déductifs, ... On peut être tenté de penser que cette mathématique n'est qu'un rassemblement de recettes de calcul. Et pourtant, des procédés opératoires et convaincants ont exhibé des résultats parfois complexes. Les exemples de démonstration proposés font appel au principe d'invariance des aires et des volumes dans le déplacement des pièces d'un « puzzle » : le système démonstratif repose sur le concret de l'évidence visuelle. Ils sont tous extraits du chapitre 9 du *Jiuzhang Suanshu*, abrégé en JZSS, [*Neuf chapitres sur l'art du calcul*] et ses commentaires ; deux des exemples ont été repris ci-dessous.

La plupart des historiens considèrent le JZSS comme une référence des mathématiques chinoises, comme le sont pour nous les Éléments d'Euclide : le classique par excellence.

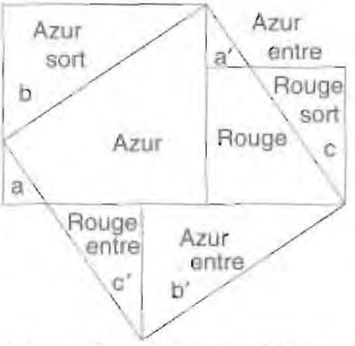
Le JZSS est le plus ancien manuel chinois de mathématiques qui soit parvenu jusqu'à nous et remonte, pour l'essentiel, à la dynastie des Han (−206, 220).

Le JZSS est une collection de 246 problèmes qui comprennent toujours : (1) l'énoncé du problème, (2) la réponse numérique et (3) la méthode qui doit être utilisée pour calculer la solution d'après les données. Chaque problème suit un plan invariable et ne contient ni définition, ni explication logique. D'une façon générale, chaque chapitre du JZSS est construit dans un ordre qui dépend du degré de complexité mathématique (par exemple, le calcul d'aires planes précède celui des aires curvilignes).

Toutefois, les démonstrations ne sont pas aussi anciennes que le texte original : elles se rencontrent dans divers commentaires publiés à partir de la fin du 3^{e} siècle. De plus, le texte et les commentaires du JZSS ne contiennent pas de figures : ce sont des reconstitutions.

Le Chapitre 9, contenant 24 problèmes, est titré *gougu* (base-coude) puisque, selon le commentateur Liu Hui (+ 270), la base est le « petit » côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et le coude est le « grand » côté.

Tous les problèmes de ce chapitre ont en commun le fait qu'ils introduisent le triangle rectangle pour appliquer le théorème de Pythagore (problèmes 1 à 4), utiliser les propriétés de ce théorème pour résoudre des triangles rectangles (problèmes 5 à 14), déterminer le côté (resp. le diamètre) d'un carré (resp. d'un cercle) inscrit dans ce triangle (problèmes 15 et 16) ou mesurer indirectement des distances. Les autres problèmes portent sur des équations quadratiques.



Problème 3 : *Théorème « de Pythagore ».*

[Une des clés de voûte de la technique du gougu].

La figure ci-contre montre un triangle rectangle et les deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Ces carrés sont appelés *azur* et *rouge* sur la figure chinoise car ils correspondent aux pièces du puzzle qui ont ces couleurs.

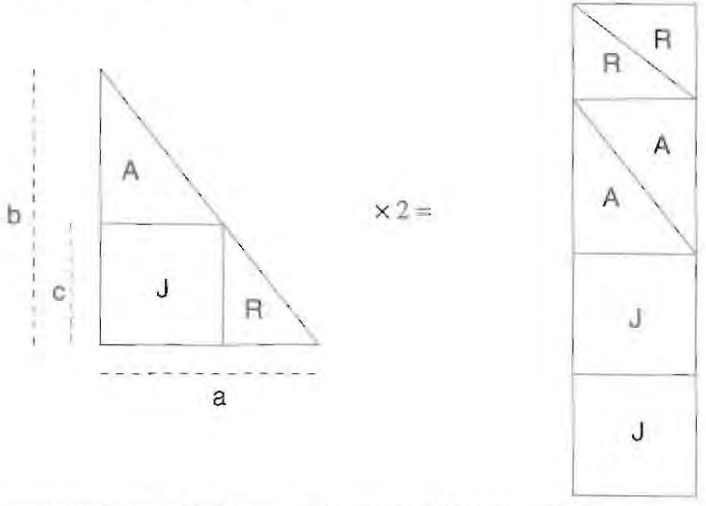
Dans un premier temps, le carré de l'hypoténuse est partiellement recouvert par les carrés *azur* et *rouge*. Pour montrer que ces deux surfaces carrés recouvrent complètement et exactement le carré de l'hypoténuse (comme le stipule le théorème de Pythagore), il suffit de bouger les pièces comme indiqué sur la figure : les pièces a, b et c sont déplacées pour aller respectivement en a', b' et c'.

Problème 15: *Calculer la longueur du côté du carré inscrit dans un triangle rectangle.*

a et b sont les longueurs des côtés de l'angle droit ; c est la longueur cherchée.

A, J et R désignent respectivement des pièces *azur*, *jaune* et *rouge*.

Comme l'indique Liu Hui, la méthode de la solution implique un rectangle dont l'aire peut être décrite de deux façons différentes. Pour cela, il réarrange les pièces résultant d'un découpage de deux exemplaires identiques du triangle donné (comme indiqué sur la figure 2). Il crée ainsi un rectangle dont l'aire est égale, d'une part, à $a\,b$, puisque ses dimensions sont les longueurs des côtés de l'angle droit, et, d'autre part, à $c\,(a + b)$, puisque ce rectangle a pour largeur c (la longueur du côté du carré) et pour longueur $a + b$. D'où $c = a\,b\,/\,(a + b)$.



Les techniques précédentes présentent d'évidentes limites car ce qui vaut pour un type de problème ne s'applique pas à un autre : un effort d'invention doit être refait à chaque fois. De plus, les techniques de dissection manquent de rigueur : on sait tous « démontrer », depuis Lewis Carroll, l'égalité 64 = 65. Toutefois, on ne connaît pas d'exemple historique d'erreur mathématique due à un découpage malencontreux. Mais le but de cet atelier n'était pas de comparer entre elles des mathématiques en tant que mathématiques en soi : il était seulement question de retracer des fragments d'histoire des mathématiques et de mieux apprécier l'immense effort d'ingéniosité qu'a exigé le développement des mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

J.-C. Martzloff, *A history of chinese mathematics*, Éd. Springer, 1997.

J.-C. Martzloff, *Exemples de démonstrations en mathématiques chinoises*, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Colloque Inter IREM, Besançon, Mai 1993.

N. Verdier et E. Busser, *Les mathématiques chinoises*, Tangente, n° 50.