On n'a jamais fini de comprendre

Marcel Dumont

Préambule : Faute de comptes-rendus critiques, faits évidemment par des participants indépendants des animateurs, des deux ateliers intitulés « **Le temps de rêver** » et « **Le rêve de Syracuse** », je vais essayer de condenser deux exemples personnels sous le même thème, sous-jacent aux deux ateliers : « **on n'a jamais fini de comprendre** » (attention : « comprendre » ne signifie pas « être capable de faire », sinon un robot, bien programmé, donc capable de faire, « comprendrait ce qu'il fait », absurdité provisoire !). Comprendre, c'est essentiellement saisir les relations profondes entre hypothèses et conclusions et… le contexte ouvert. Démontrer, c'est établir un chemin dans le réseau complexe de toutes les relations, et ce chemin peut être tortueux, très long et dissimuler les relations profondes en empruntant des voies détournées. La première attitude peut aider la seconde, mais c'est la diversité des secondes qui peut faire apparaître la première (faute de place, je laisse au lecteur la curiosité et la nécessité de se faire ses propres dessins, indispensables si on veut sortir de ses habitudes).

Premier exemple : relation d'Euler-Descartes (nous allons du spatial au numérique), relation bien connue entre les nombres de sommets, arêtes et faces de tout polyèdre homotope à la sphère, convexe ou non-convexe, comme un cube « étoilé » (six pyramides à base carrée collées aux six faces du cube).

Présentation habituelle de la formule : S – A + F = 2.

De multiples démonstrations sont proposées (cf., par exemple, « Géométrie » de Berger). La plupart ont cette particularité de ne rien faire comprendre, par exemple lorsqu'il y a utilisation de récurrences.

Pourquoi cette relation est-elle vraie pour un polyèdre homotope à la sphère et ne l'est-elle pas lorsque le polyèdre est homotope à un tore par exemple (chambre à air) ? G.-Th. Guilbaud, dans un de ses cours mémorables, nous a donné une démonstration merveilleuse car elle fournit

une réponse à cette question. Malheureusement, elle s'appuie sur des notions qui ont disparu des programmes, faute d'avoir été concrétisées et… utilisées pratiquement :
– sur une sphère, tout sans-bord est un bord,
– sur un tore, il existe des sans-bords qui ne bordent rien, par exemple les cercles méridiens et parallèles qui ne partagent pas la surface du tore en deux sous-espaces.

Voici , grosso modo, l'essentiel de la démonstration : on prend l'ensemble des sous-ensembles de faces, idem pour les arêtes et pour les sommets ; on a trois espaces vectoriels sur le corps (0,1) et, comme loi de groupe, la différence symétrique. La fonction « a pour bord » respecte l'opération « différence symétrique » : c'est donc un morphisme entre deux espaces vectoriels consécutifs. On peut donc appliquer la relation aux dimensions entre espace, image, noyau. On complète la suite des trois espaces avec, en tête, l'espace vide, en queue, l'espace limité à un objet, le solide lui-même. Dire que tout sans bord est un bord revient à dire que la suite est exacte : le noyau d'un morphisme est l'image du morphisme précédent. On somme en alternant les quatre relations aux dimensions et on obtient la relation :

$$1 - S + A - F + 1 = 0.$$

Je croyais avoir compris la raison jusqu'au jour où j'ai ouvert le contexte aux hypercubes, hypertores, etc. En passant, je souligne à nouveau que représenter un hypercube à quatre dimensions par deux cubes concentriques, c'est s'interdire toute généralisation spatiale, car la quatrième direction est représentée par des diagonales concourantes. Tandis que construire l'hypercube de dimension 5, par exemple en translatant un hypercube de dimension 4, la cinquième direction étant la direction de translation permet des réalisations matérielles. On comprend mieux en dessinant un arbre exponentiel en base 2. À chaque niveau de l'arbre, est accroché un hypercube formé des deux hypercubes précédents reliés par des arêtes de translation. D'où nouvelle généralisation en prenant des arbres exponentiels en base 3, 4, 5, etc., mais cette fois ce ne sont plus des arêtes de translation, mais des circuits de translations, d'où le mot hypertores.

Bref, que devient la relation « a pour bord » ? La notion intuitive de « bord » au sens de sous-espace partageant en deux l'espace, n'a évidemment plus de sens. On change le sens du mot pourvu qu'en l'appliquant aux espaces précédents, on retrouve les mêmes objets définis par le premier sens : le cube est bordé par l'ensemble de ses six faces, une face est bordée par l'ensemble de ses quatre arêtes, etc. Autrement « vu », un hypercube de dimension n est bordé par l'ensemble de tous ses sous-hypercubes de dimension $n-1$. On compte alors tous les sous-hypercubes contenus dans un hypercube donné, en utilisant la loi de construction ci-dessus et on obtient le tableau suivant (avec les codes suivants : H(0) : point, H(1) : segment, H(2) : parallélogramme, H(3) : pavé, parallélépipède, « cube », H(4) : hypercube de dimension 4, H(5) : hypercube de dimension 5 , etc. et $h(m,n)$: nombre d'hypercubes de dimension n contenus dans un hypercube de dimension m :

	H(0)	H(1)	H(2)	H(3)	H(4)	H(5)	H(6)
H(0)	1	0	0	0	0	0	0
H(1)	2	1	0	0	0	0	0
H(2)	4	4	1	0	0	0	0
H(3)	8	12	6	1	0	0	0
H(4)	16	32	24	8	1	0	0
H(5)	32	80	80	40	10	1	0

avec la récurrence :

$$h(m,n) = h(m-1,n-1) + 2\,h(m-1,n)$$

évidente lorsque l'on construit les hypercubes sur l'arbre exponentiel par translation : le cube, par exemple, est obtenu par translation d'un parallélogramme, chaque arête donne naissance à un parallélogramme de jonction.

Curieusement on observe que la relation d'Euler-Descartes est vérifiée pour chaque H. Exemple :

$$H(4) : 1 - 16 + 32 - 24 + 8 - 1 = 0,$$
$$H(5) : 1 - 32 + 80 - 80 + 40 - 10 + 1 = 0.$$

POURQUOI ? La notion spatiale de bord au sens de « partage en deux » ne suffit donc pas à expliquer pourquoi on a cette relation.

Mieux ou pire : en base 3, on construit l'arbre exponentiel (de chaque nœud partent trois branches). À chaque niveau, on relie les trois objets obtenus par des circuits triangulaires. Exemple : au niveau 1, on a un triangle, au niveau 2, on a trois triangles reliés par trois triangles de sommets les points correspondants (imaginons un tore ayant trois triangles pour cercles méridiens et trois autres triangles pour cercles parallèles) et ainsi de suite (d'où le terme d'hypertore que je choisis, faute de mieux). Comptons alors tous les sous-hypertores contenus dans chaque hypertore, avec un codage analogue :

	T(0)	T(1)	T(2)	T(3)	T(4)	T(5)	Σ(T)	Σ(T) alternée
T(0)	1	0	0	0	0	0	1	1
T(1)	3	1	0	0	0	0	4	2
T(2)	9	6	1	0	0	0	16	4
T(3)	27	27	9	1	0	0	64	8
T(4)	81	108	54	12	1	0	256	16
T(5)	243	405	270	90	15	1	1024	32

avec la relation analogue :

$$t(m,n) = t(m-1,n-1) + 3\ t(m-1,n).$$

Ici, Euler-Descartes n'est pas vérifiée, mais on observe que la somme des termes est une puissance de 4 et que la somme alternée est une puissance de 2. POURQUOI ?

Si on continue en base 4, sur l'arbre exponentiel, les quatre nouveaux « objets » issus d'un même objet sont reliés par des tétraèdres de jonction (on pourrait les appeler des hyper-tétraèdres !). La relation permettant de compter et d'établir le tableau devient :

$$q(m,n) = q(m-1,n-1) + 4\ q(m-1,n).$$

Cette fois les sommes de termes sont des puissances de 5 et les sommes de termes alternées sont des puissances de 3.

En base 5, un « objet » de niveau n est constitué par 5 « objets » de niveau $n-1$, reliés par des « pentaèdres » ou graphes complets à 5 sommets (on peut les construire matériellement, en soudant des tiges, mais il faut imaginer que, comme dans l'univers, parodiant Lavoisier : **Rien n'est Vide, Rien n'est Plein, Tout se Traverse : il suffit de changer d'échelle** – nous devons abandonner les idées fixes des quatre niveaux : point, ligne, surface, solide qui peuvent séparer des espaces).

Ici, les sommes de termes sont des puissances de 6 et les sommes alternées sont des puissances de 4. POURQUOI ?

À cause de la loi de construction d'un tableau, il suffit de remplacer chaque terme de niveau m par les deux termes de niveau $m-1$ correspondants pour constater que : la somme des termes de niveau m est égale à $b+1$ fois la somme des termes de niveau $m-1$ (b étant la base), et que la somme alternée de niveau m est égale à $b-1$ fois la somme des termes de niveau $m-1$, d'où les puissances de $b+1$ pour les unes et les puissances de $b-1$ pour les autres.

Et tout devient clair : en base 2, les sommes sont des puissances de 2+1, c'est-à-dire 3 et les sommes alternées sont des puissances de 2−1, c'est-à-dire de 1. Ces dernières sont donc constantes, quel que soit le niveau, c'est-à-dire la dimension de l'hypercube (cf. le tableau des hypercubes).

Dans cette optique, il vaudrait mieux écrire Euler-Descartes sous la forme:

$$S - A + F - I = 1^3 \text{ (pour le pavé),}$$

$$S - A = 1^2 \text{ (pour le parallélogramme),}$$

pour H(4), on aurait 1^4, etc.

Conclusion provisoire : la généralisation de la relation d'Euler du cube à d'autres polyèdres entraîne une vision topologique, la généralisation aux hypercubes entraîne une vision combinatoire, donc numérique. Mais il n'y a pas de frontière entre les deux visions. Si on croit avoir tout compris, il suffit de représenter les dénombrements sur des réseaux à arêtes multiples et multidimensionnels pour revenir à des problèmes spatiaux de structures de tableaux et de transferts de structures.

Le deuxième exemple « **Suite hongroise, dite suite de Syracuse** » abordera ce genre de problèmes dans un prochain papier. Pour stimuler le lecteur, voici un spot publicitaire :

« 10 000 $ offerts par l'Université de Syracuse à qui résoudra le problème suivant :

On part d'un nombre entier quelconque :
- s'il est pair, on le divise par 2,
- s'il est impair, on le triple et on ajoute 1,
- et on recommence avec le nombre obtenu.

Toutes les expériences tentées donnent des suites conduisant à la période 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, ..., etc.

Démontrer soit que c'est vrai pour tout nombre de départ, soit que ce n'est pas vrai pour tout *n*, soit que c'est indémontrable dans notre système habituel ».

Cf. « Pour la Science », Mai 98, article de Jean-Paul Delahaye (curiosité : n'importe qui peut chercher ce problème ; les plus grands spécialistes n'ont encore rien trouvé. Ce qui prouve que nos théories les plus sophistiquées ne sont pas nécessairement adaptées à tous les problèmes, même les plus simples apparemment : **châteaux de cartes bâtis sur le sable mouvant de notre ignorance**).

Bon courage (à suivre... ou plutôt à précéder !).