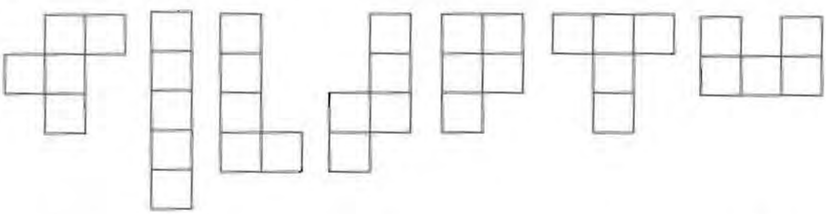
Pentaminos : Le retour !

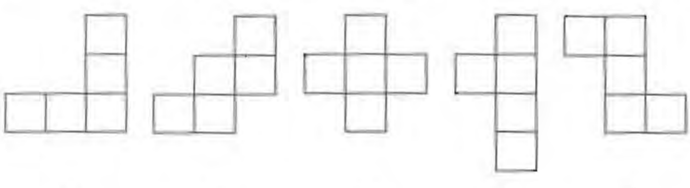
François Drouin(*)

1907 : Henry Dudeney lève le rideau sur les douze assemblages possibles de cinq carrés et propose le premier problème les concernant.

1953 : Solomon Golomb les fait sortir de l'anonymat en les désignant par des lettres et cette habitude survit en 1998.



F I L N P T U



V W X Y Z

Des jeux du commerce, des récents articles de « Pour la science », la quantité importante de sites Internet s'y consacrant nous fournissent de nombreux « remake » des scénarii de 1907 à 1953.

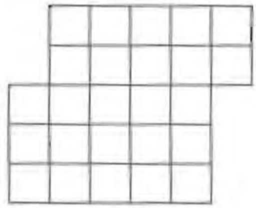
Pendant l'atelier proposé lors des journées de Rouen, nous avons constaté que cette source d'inspiration pouvait encore maintenant susciter de nouveaux thèmes de recherche tant pour nos élèves (en classe ou en club de mathématiques) que pour nous-mêmes.

(*) Collège Les Avrils 55300 SAINT MICHEL

1) Examinons le nombre de positions possibles de chaque pièce. Certaines pièces ne seraient-elles pas plus difficiles à placer ?

2) Quels rectangles peuvent être recouverts par des pièces choisies parmi les douze pentaminos ?

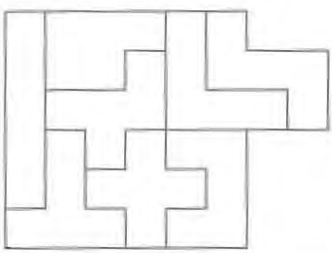
3) Le polygone ci-contre représente le nombre $2 \times 5 + 3 \times 5$, c'est-à-dire 25.



Cherchons d'autres décompositions de 25 en somme de produits de deux entiers naturels et dessinons les polygones obtenus.

• Ces polygones sont-ils toujours recouvrables par des pièces choisies parmi les douze pentaminos ?

• Quel polygone a le plus grand périmètre ? Le plus petit ?

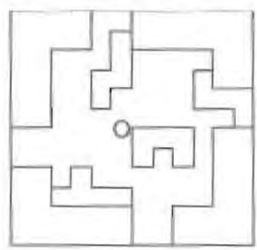


4) Quels nombres écrits sous la forme de somme de produits de deux entiers naturels peuvent être représentés par des polygones recouvrables par des pièces choisies parmi les douze pentaminos ?

Ci-contre (à gauche) figure un exemple pour 40 ($40 = 6 \times 6 + 2 \times 2$).

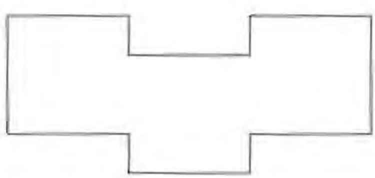
Échangeons nos découvertes.

5) Ci contre (à droite), dessinons les images des quatre pentaminos déjà placés par la rotation de centre O et d'angle 90°.



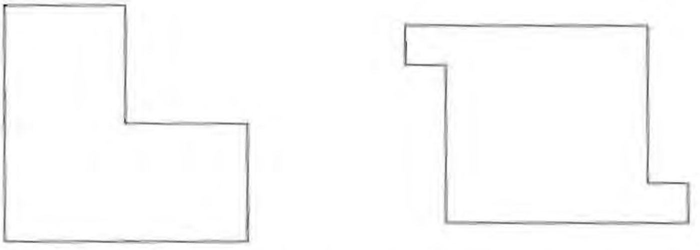
Construisons d'autres problèmes où interviennent rotations, symétrie.

6). Trouvons, dans la figure ci-contre, toutes les positions possibles de deux carrés symétriques par rapport à l'axe de symétrie de la figure. Les cases restantes sont-elles toujours recouvrables par des pièces choisies parmi les douze pentaminos ?



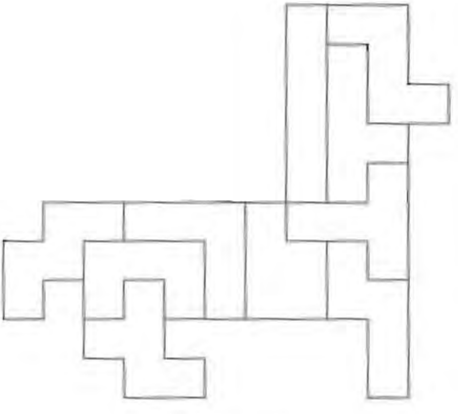
27 = 25 + 2 (d'où les deux cases restantes!), mais il est possible de trouver d'autres représentations de 27 permettant de travailler avec des symétries d'axes « obliques » ou des symétries centrales.

Exemples :

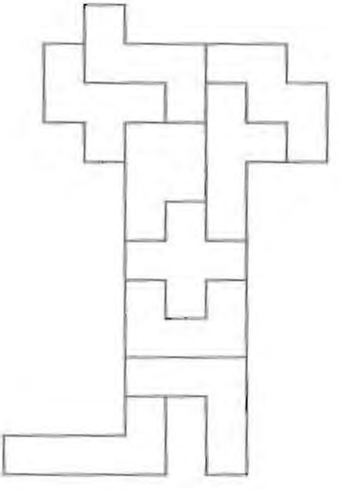


7) En utilisant des pièces choisies parmi les douze pentaminos, il est possible de réaliser des silhouettes d'objets, d'animaux…

En voici deux créées par des élèves meusiens :



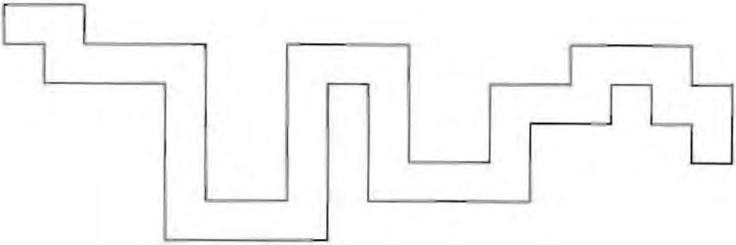
Le centaure



L'Italie

Pourquoi ne pas en inventer de nouvelles et faire des échanges avec d'autres créations ?

8) En utilisant des pièces choisies parmi les douze pentaminos, il est possible de réaliser le boa suivant.

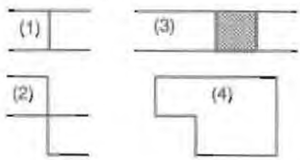


Avec les mêmes pièces, d'autres positions du boa sont représentables. En particulier, le boa peut se mordre la queue !

Quelle est l'aire maximale de la surface entourée par le boa se mordant la queue ?

Cette recherche est partie dans de nombreuses directions, souvent imprévues !

Doit-on conserver l'ordre des pièces pour refermer le boa ?

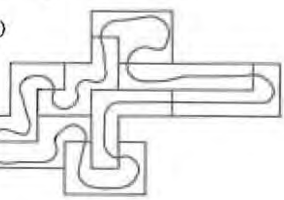


Le boa ne semble pas pouvoir se refermer ainsi (1), mais il se referme « en coin » (2) ou en avalant une case (3).

De plus, en utilisant six des sept pièces, le boa se referme et, en utilisant le (4), le boa se referme également.

Pourquoi se referme-t-il avec six ou huit pièces et pas avec sept ?

(5)

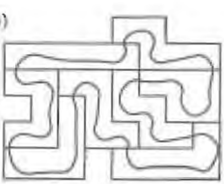


Dans ces trois cas, quelle est l'aire minimale entourée par le boa ?

En utilisant les huit pièces, quelle est l'aire minimale entourée par le boa ?

Voici la proposition d'un élève (5).

(6)



Les huit pièces font un total de 40 carrés. Peut-on enfermer le boa dans un rectangle 5×8 ?

Claude PAGANO (La Seyne sur mer) y est presque arrivé dans l'exemple ci-contre (6). Et vous ?

9) Les pentatextes, tels qu'ils sont présentés dans le numéro 419 du Bulletin vert, sont aussi source de recherche, de création et d'échange.

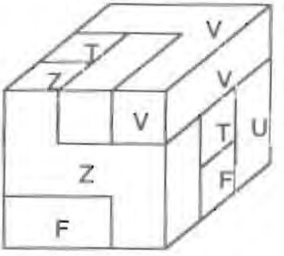
10) Considérons maintenant les assemblages plats de cinq cubes.

$27 = 3 \times 3 \times 3$ ou $27 = 5 \times 5 + 2$.

Prenons une « barre » de deux cubes et choisissons cinq pièces parmi les douze pentacubes plats pour former un cube $3 \times 3 \times 3$.

Voici une possibilité réalisée à l'aide de deux cubes et des pentacubes F, T, U, V, Z.

Quels autres choix de pentacubes faire ?



Remarque : travailler avec les douze pièces est difficile pour un élève (ou pour le joueur débutant). Aussi nombre de problèmes proposés pendant cet atelier n'utilisent que des « sous-jeux » : il faut choisir des pièces parmi les douze qui existent. L'élève en difficulté est remis en situation de réussite lorsque ce qu'il a réalisé avec certaines pièces fait partie de la solution au problème posé.

Aux nombreuses questions posées dans les pages précédentes, des éléments de réponses ont été proposés par des élèves ou des adultes. D'autres restent des problèmes très ouverts.

Ne pourrions-nous pas échanger l'avancement de nos travaux (et ceux de nos élèves) et nous poser d'autres questions à propos de ces douze têtes d'affiches connues sous le nom de F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y & Z ?