

La double implication

Denis Guedj

Denis Guedj est professeur d'histoire des sciences à l'université de Paris VIII.

Écrivain et cinéaste, mathématicien, il est l'auteur de : *la Méridienne, la Révolution des savants, l'Empire des nombres, la Gratuité ne vaut plus rien et autres chroniques mathématiciennes, le Théorème du perroquet.*

La conférence de Denis Guedj a débuté par un « One Zero show », pièce de théâtre à plusieurs personnages intitulée « *Mille et un nombre et des poussières* », puis par l'une de ses chroniques mathématiciennes : « *La gratuité ne vaut plus rien* ».

Par cette pièce et ces chroniques, Denis Guedj veut montrer le lien entre les mathématiques et l'actualité.

« Il ne s'agit pas de l'application des mathématiques au monde réel, mais de leur implication dans ce monde... : éclairer des moments de l'actualité de notre temps par l'intelligence des mathématiques. C'est-à-dire, par exemple, son activité langagière extraordinaire. Tous les mathématiciens savent le nombre de façons extrêmement riches que nous avons de dire *le même* en maths : égalité, équivalence, similitude, bijection, isomorphisme... On peut ainsi comprendre pourquoi les choses, dans le monde, dans la vie, ont autant de façons différentes d'être les mêmes. »

Plutôt que de résumer entièrement la conférence de Denis Guedj, nous reprenons le début de son intervention et sa chronique « *La gratuité ne vaut plus rien* ».

C'était au commencement du monde... au commencement des nombres ?
Disons au commencement des nombres.

Un jour le Un fut, ce fut le premier jour. La veille, il n'était pas, le lendemain il était là.

« Mmmmmmmmmmmmm... ». Dans l'univers vide, retentit son cri, qu'il fut seul à entendre.

« Je suis l'unique... », il resta ainsi plein de lui, ravi. Et il s'aimait, et il s'aimait, il s'aimait tant que bientôt ce lui fut une blessure de ne pas pouvoir une seule fois regarder sa figure. Se voir, se voit l'espoir. Sur sa patte unique, il parcourt le monde. Là une mare à l'eau limpide, il se penche, il se voit « Oh ! Beauté... ». Il se baisse, ils se disent : « Narcisse bis » et, à l'instant, il est Deux. Et oui, Mesdames, Messieurs, pour s'aimer vraiment, il faut être deux. La mare luit, diamant qui l'éblouit. La tête lui tourne, ivresse. L'eau se trouble.

– Qui es-tu, toi ?

– On me nomme Trois. Je suis toi, et toi et toi.

– Quoi ? Tu prétends que tu es moi et moi et moi ?

C'était parti, le pli était pris. Voyage pour Cythère, le Un enfin s'itère.

« Un plus un plus un plus un : moi plus moi plus moi. Un plus un plus un plus un plus un : moi plus moi plus moi plus moi. Moi et moi et moi et moi encore, moi toujours, toujours moi, moi en plus, moi en sus, toujours plus ». Il n'y a que de l'Un dans l'autre, de l'unique dans le multiple. Et le Un, s'additionnant à lui-même, engendra les nombres un à un, à la chaîne, sans peine.

La gratuité ne vaut plus rien.

Campagne de publicité lancée
par une chaîne de magasins de la grande distribution.

Je marchais benoîtement dans les rues de la ville quand mon regard fut frappé par ces mots haut perchés :

TOUT CE QUI A UN PRIX PEUT ÊTRE VENDU MOINS CHER.

Je restai coi, cloué sur le trottoir, bousculé par des passants insensibles à mon émoi. Quel était le penseur qui avait inscrit ces mots sur les murs de notre cité ? La chaîne de magasins Leclerc ! Slogan ou théorème ? Je me précipite dans l'un des centres de la dite chaîne pour vivre en direct la publicité. Une expérience extrême.

Là-bas, sur un rayon, j'aperçois comme offerte, une marchandise M. Elle a un prix « x_1 » marqué dessus. Ouf ! Sur le papier de mes commissions, je note $p(M) = x_1$. Je jette M dans un caddie et m'avance pour payer, quand sur moi fondent les mots du slogan. Ils me somment d'appliquer le principe affirmé dans la publicité. La marchandise M a un prix. Elle peut donc être vendue moins cher ! Disons à un prix x_2 . Dans mon caddie, sous mes yeux, par la seule force des mots, mon M vient incontinent de baisser de prix : $p(M) = x_2$ avec $x_2 < x_1$. Ébranlé tout de même, je fais un pas de plus vers la caisse ; mais les mots de l'affiche sauvagement reviennent à la charge. Ce nouveau prix de M, x_2 , est un prix ; un prix comme un autre. À ce titre, M peut être vendu moins cher que x_2 . Disons x_3 . Et rebelote. Chaque pas vers la caisse donnait naissance à un prix inférieur au précédent. Et la caisse était loin encore : c'est que j'étais dans une très grande surface.

Sur le papier des commissions, les x se suivaient et ne se ressemblaient pas :

$$\dots < x_5 < x_4 < x_3 < x_2 < x_1.$$

Mais où cela s'arrêtera-t-il ? Cela s'arrêtera-t-il seulement ?

« Moins cher » est une *relation d'ordre stricte* définie dans l'ensemble des prix. Chaque prix, du seul fait qu'il s'affichait, en produisait un nouveau, strictement inférieur. J'avais la berlue !

Et tous ces x étaient positifs. Sur le papier des commissions, les prix successifs de M formaient une suite numérique strictement positive, *strictement décroissante*, nom attribué à ce type d'objets dans l'univers mathématique. De telles suites admettent toujours une limite, au sens où leurs termes se rapprochent d'aussi près que l'on veut d'un certain nombre, qui est cette *limite* même.

La suite des prix de ma marchandise M avait donc une limite ; les mathématiques me l'assuraient. Quelle était-elle ? J'allais enfin savoir combien j'aurais à payer. Cela devenait de plus en plus urgent, je me rapprochais de la caisse, tripotant nerveusement mon porte-monnaie. Là, je dus faire un effort. La machine affichait les prix au centime près et ces prix devaient être inférieurs à x_1 ; il n'y avait donc qu'un nombre fini de prix possibles (autant que de nombres décimaux avec deux décimales, inférieurs à x_1).

J'avais la solution ! Au milieu d'une émoustillante musique d'ambiance, je pouvais clamer mes certitudes : la suite des x tend vers 0 et l'atteint.

Il existait donc un entier n tel que x_n était égal à 0. Pourvu que j'atteigne cet entier avant l'heure de la fermeture ! La marchandise M qui s'étalait dans mon caddie valait zéro franc ! Ni plus, ni moins. Et ceci parce qu'il n'y avait pas une infinité de prix possibles.

Mais il n'y avait pas que M à être dans ce cas ; les mots de la pub résonnèrent dans mes oreilles : « TOUT ce qui a un prix... ». Ainsi toutes les marchandises exposées ici ne valaient rien ! Sur les murs de nos cités, au nez et à la barbe de chacun d'entre nous, un redoutable slogan anticapitaliste était affiché par les soins d'un grand de la distribution : TOUT CE QUI A UN PRIX NE VAUT RIEN.

N.B. Suivant la règle logique qui édicte que si A entraîne B , alors le contraire de B entraîne le contraire de A , je déduisais, en faisant la queue, que puisque « tout ce qui a un prix ne vaut rien », alors « tout ce qui ne vaut pas rien, c'est à dire tout ce qui vaut, n'a pas de prix ». Acculé, je ne pus que conclure : la marchandise n'a rien à voir avec la valeur !

Enrichi par les bonnes affaires que j'avais failli faire chez Leclerc et, rentrant dans mes pénates, mon cabas plein d'optimisme, j'empruntai le métro. Et voilà que, dans les couloirs déserts, s'affichant au milieu d'un panneau illuminé, une phrase kidnappa mon regard : TOUT CE QUI N'A PAS DE PRIX EST GRATUIT. Une publicité encore ; de quel magasin ? Ce n'était pas un magasin, c'était le musée du Louvre. Sous la phrase en médaillon : *Vénus et les Grâces*. Détail de Botticelli, Marchandises terrestres, marchandises célestes ! Voilà la marchandise piégée par la finitude. Dans le monde qu'elle a contribué à clore et dont elle a éjecté l'infinitude, la publicité l'affirme, les choses ne valent plus rien. La gratuité ne peut être vendue !