Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes »... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes...

Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
42 quai de la Loire,
75019 Paris.

NOUVEAUX ÉNONCÉS

ÉNONCÉ 283 (d'après colloque Maths en Jeans, 29 mars 1999, collège L'Ardillière de Nézant de 95-Saint-Brice & collège de 95-Montmorency)

Comment doit-on plier en deux un triangle pour que l'aire du polygone (de 3 à 7 côtés) résultant de ce pliage soit minimale ?

ÉNONCÉ 284 (Michel LAFOND, 21-Dijon)

Trouver un polynôme P(x) à coefficients entiers n'ayant aucune racine rationnelle et tel que pour tout entier n, il existe un entier m pour lequel P(m) soit divisible par n.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 264 (Gilbert GRIBONVAL, 91-Palaiseau)

Le quadrilatère ABCD est quelconque. Chacun de ses côtés a été partagé en trois parties égales. Certains disent que l'aire du quadrilatère ABCD est neuf fois celle du quadrilatère MNPQ. Et vous, qu'en pensez-vous ?

RÉPONSE

97% des lecteurs pensent que c'est vrai (sous certaines réserves).

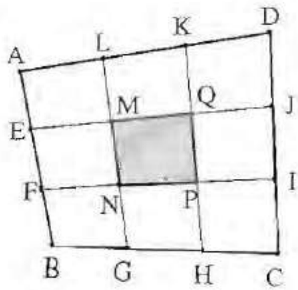
Cet énoncé n'est pas des plus originaux, et l'auteur en était conscient : on le trouve, par exemple, dans *Tangente* n° 4, avril-mai 1988, p. 43-44, puisque posé en finale des Olympiades de l'Ile de France le 16 avril 1988 ; puis dans *Quadrature* 20, février-avril 1995, p. 33 (énoncé 58 de François Rideau) ; également dans un ouvrage roumain cité par Miguel AMENGUAL COVAS (Majorque, Espagne) : *Geometria patrulaterului - teoreme si probleme*, Bucarest, 1998, p. 245-246.

Toutefois, à en lire les 34 autres solutions que j'ai reçues, de Miguel AMENGUAL-COVAS (Majorque, Espagne), Alain BESSON (74-St Julien en Genevois), Guy BOUCHER (75-Paris), Mireille BOURNAUD (94-Vitry s/Seine), Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Jacques DAUTREVAUX (06-St André), Daniel DAVIAUD (17-Jonzac), Edgard DELPLANCHE (91-Créteil), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Gérard HECQUET (31-Aureville), Philippe JACQUEMIER (38-Domène), A. LAOUINA & A. SEMGHOULI (Kenitra, Maroc), Jean-Yves LE CADRE (56-Vannes), Jean LEFORT (68-Wintzenheim), Jean-Pierre MANOLA (75-Paris), René MANZONI (76-Le Havre), Moubinool OMARJEE (75-Paris), Jean PERENNEC (29-Quimper), Annie PERROT (75-Paris), Pascal PETER (33-La Rivière), Marguerite PONCHAUX (59-Lille), Anne-Marie RAUCH (67-Strasbourg), Raymond RAYNAUD (04-Digne), Pierre RENFER (67-Ostwald), Jean-Eric RICHARD (60-Précy s/Oise), David RIGAUT (06-Nice), Olivier ROUSTANT (69-Lyon), Jean-Christophe SALMON (74-Cluses), Sylvie TAZAMOUCHT (01-St Germain les Paroisses), M. VIDIANI (21-Fontaine lès Dijon), André VIRICEL (54-Villers lès Nancy), et deux solutions fausses… le problème n'a pas encore perdu tout son intérêt.

Citons, pour commencer, la

DÉMONSTRATION d'Anne-Marie RAUCH

1) N = bar {(A,2),(B,4),(C,2),(D,1)} car le barycentre de {(A,2),(B,4),(C,2),(D,1)} est aussi celui de {(F,6),(I,3)} ou de {(G,6),(L,3)}, c'est donc le point d'intersection des droites (FI) et (GL). De même,
M = bar {(A,4),(B,2),(C,1),(D,2)},
P = bar {(A,1), (B,2),(C,4),(D,2)},
Q = bar {(A,2),(B,1), (C,2), (D,4)}



2) $\overrightarrow{NQ} = (1/3)\,\overrightarrow{BD}$.

Par définition du barycentre,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NQ} &= (2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} + 4\overrightarrow{ND})/9\\ &= (\overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{ND} - (4\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND}))/9\\ &= (-3\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{ND})/9 = \overrightarrow{BD}/3.\end{aligned}$$

De même, $\overrightarrow{MP} = (1/3)\,\overrightarrow{AC}$. .

3) L'aire d'un quadrilatère convexe ABCD est égale à : $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABCD) &= \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ADC)\\ &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC}\right\|\\ &= \frac{1}{2}\left\|\left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\right) - \left(\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC}\right)\right\|\end{aligned}$$

car les vecteurs $(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC})$ ont même direction, mais sont de sens contraires. Or

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC}) &= ((\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}) \wedge (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})) - (\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC})\\ &= (\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BD} \wedge (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

De même, $\mathcal{A}(MNPQ) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{NQ} \wedge \overrightarrow{MP}\right\|$.

4) L'aire du quadrilatère ABCD est donc bien neuf fois celle de MNPQ, car :

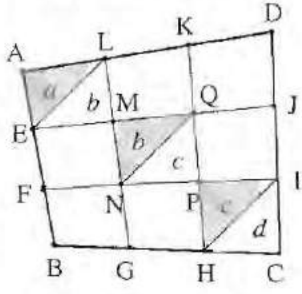
$$\overrightarrow{NQ} \wedge \overrightarrow{MP} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}\right) \wedge \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{9}(\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{AC}).$$

Mais à cette démonstration, il convient d'ajouter quelques

REMARQUES

L'idée de départ est énoncée ainsi par Daniel DAVIAUD : « les “trianes” d'un quadrilatère se coupent en leurs tiers ». Plusieurs démonstrations ont été proposées, outre celle ci-dessus par les barycentres. Certains lecteurs ont utilisé le parallélogramme de Varignon : « les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe sont les sommets d'un parallélogramme dont l'aire est la moitié de celle dn quadrilatère ». Raymond RAYNAUD rappelle que si deux points *e* et *j* parcourent [AB] et [DC] en décrivant des divisions semblables, tout point partageant (e,f) dans un rapport constant se déplace sur une droite.

Une fois franchie cette première étape, l'aire s'obtient de différentes manières : parmi les plus géométriques, citons Jean-Yves LE CADRE qui signale que si, dans un quadrilatère convexe (par exemple, figure 2, AFPK), l'on relie un point intérieur quelconque (et notamment, mais pas seulement, l'isobarycentre M) aux quatre milieux des côtés, la somme des aires de deux quadrilatères non consécutifs (AEML et MNPQ) ainsi obtenus est la moitié de l'aire du quadrilatère initial. On en déduit que les aires : $a + c = 2b$ (car a = (1/4) aire(AFK)), $b + d = 2c$, donc $b + c = a + d$ = (1/9) aire(ABCD). Plus généralement, plusieurs lecteurs montrent que les aires des quadrilatères d'une même ligne ou d'une même colonne sont en progression arithmétique : Philippe JACQUEMIER va jusqu'à prolonger le quadrillage à l'infini !



Si beaucoup de démonstrations se servent des produits vectoriels pour les calculs d'aires (mais pas toujours du produit vectoriel des diagonales), d'autres font appel aux déterminants, à l'intégration, utilisent le logiciel Maple ou encore (Moubinool OMARJEE) la formule générale donnant l'aire d'un polygone de sommets $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, ..., $P_n(x_n,y_n)$:

$$S = (1/2)\,[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \dots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)].$$

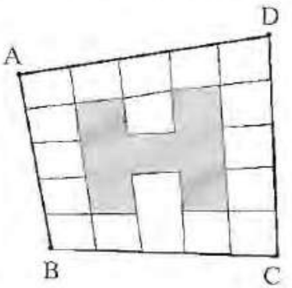
Jean LEFORT remarque que, si l'on choisit un repère affine lié aux trois points fixes A, B, C et qu'on y fait varier D, l'égalité à démontrer équivaut au fait qu'une fraction rationnelle des coordonnées de D (qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter) est toujours nulle. C'est obligatoirement vrai dans la mesure où cette fraction est nulle chaque fois que ABCD est un trapèze.

Plusieurs généralisations ont également été étudiées, mais tout d'abord (cela faisait partie de l'énoncé) : que se passe-t-il si le quadrilatère ABCD n'est pas convexe ? C'est Pascal PETER qui fait remarquer que le quadrilatère central n'est pas nécessairement défini : la méthode par les barycentres prouve bien dans tous les cas que le barycentre de {(A,2),(B,4),(C,2),(D,1)} appartient à (FI) et à (GL), mais est-ce le seul point commun à ces deux droites ? Celles-ci sont confondues si B est sur la droite joignant les milieux de [DA] et [DC], ce qui ne remet pas en cause le résultat sur les aires puisque, quel que soit le choix que nous fassions alors du point N, les points M, N et P sont alignés et l'aire du quadrilatère est en fait l'aire du triangle MPQ.

La démonstration d'Anne-Marie RAUCH ne suppose pas que le quadrilatère soit convexe, hormis la formule donnant l'aire d'un quadrilatère à partir du produit vectoriel de ses diagonales : s'il est clair qu'elle reste valable pour un quadrilatère concave non croisé, que dire d'un quadrilatère croisé, voire d'un quadrilatère gauche ?

On ne peut s'en sortir qu'en prolongeant cette formule dans ces deux cas : sinon, la propriété devient fausse et même dépourvue de sens pour un quadrilatère gauche. Comme le fait remarquer M. VIDIANI, on ne peut pas définir clairement l'aire d'un quadrilatère gauche. Pour ne pas perdre toutes les propriétés nécessaires d'additivité, il faut donc remplacer alors l'aire par le vecteur surface : les deux triangles qui composent un quadrilatère croisé étant parcourus en sens contraire, leurs vecteurs surfaces sont de sens contraires et se soustraient au lieu de s'additionner. Mais cette substitution n'est pas toujours intéressante : le vecteur surface de n'importe quel polyèdre est nul, alors que son aire n'est pas nulle.

Parmi les autres généralisations, un certain nombre de lecteurs remplacent 1/3 par 1/5, par $1/(2n+1)$ ou par un λ quelconque. On peut même faire intervenir deux paramètres λ et μ. De tout cela émerge la notion de « quadrilatères centraux », et Philippe JACQUEMIER fait remarquer que, dans la figure ci-contre, l'aire du H central est obligatoirement les 7/25 de l'aire totale, du fait que sur chaque ligne et sur chaque colonne les aires sont en progression arithmétique. Mireille BOURNAUD s'intéresse à la généralisation de ce résultat dans l'espace, en coupant en leurs tiers les 12 arêtes d'un cuboïde convexe quelconque : sur chaque face on définit un quadrilatère équivalent au MNPQ de notre problème, et on relie ses sommets aux sommets homologues M'N'P'Q' de la face opposée. Certes, les droites (MM') et (NN'), par exemple, ne sont pas coplanaires, mais le calcul barycentrique prouve qu'il y a quand même huit points au cœur de notre cuboïde appartenant chacun à trois de ces douze droites. Peut-on définir le volume de ce « cuboïde gauche » au centre du cuboïde initial et lui généraliser le résultat obtenu ci-dessus ? Le volume de ce cuboïde gauche peut-il être défini comme le produit mixte des diagonales de son « octaèdre de Varignon » (de sommets les isobarycentres des six faces) ?



ÉNONCÉ N° 265 (François LO JACOMO, 75 - Paris)

Soit ABC un triangle dont les angles seront notés $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$. Soient O et R le centre et le rayon de son cercle circonscrit, H son orthocentre, et A′, B′, C′ les symétriques de A, B, C respectivement par rapport à la droite d'Euler (OH). Montrer que $AB' \cdot OH = A'B \cdot OH = 2R^2 \left|\mathrm{siu}\left(\hat{B} - \hat{A}\right)\right|$.

SOLUTION de Pierre RENFER (67 - Ostwald)

Pour que la droite d'Euler existe, il faut que les points O et H soient distincts, c'est-à-dire que le triangle ABC soit non équilatéral.

Si l'on choisit OH comme unité de longueur, on peut utiliser l'astucieux repère orthonormé de François LO JACOMO, dans le problème 245 : il s'agit d'un repère d'origine O, tel que l'affixe de H soit 1. Soient alors α, β, γ les affixes de A, B, C. On a :

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = \beta \cdot \overline{\beta} = \gamma \cdot \overline{\gamma} = R^2,$$

$$\beta = \alpha \cdot e^{2i\hat{C}}, \gamma = \beta \cdot e^{2i\hat{A}}, \alpha = \gamma \cdot e^{2i\hat{B}},$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1,$$

car l'affixe du centre de gravité G est 1/3. On en déduit :

$$\alpha = 1/\left(1 + e^{2i\hat{C}} + e^{-2i\hat{B}}\right),$$

$$\beta = 1/\left(1 + e^{2i\hat{A}} + e^{-2i\hat{C}}\right),$$

$$\gamma = 1/\left(1 + e^{2i\hat{B}} + e^{-2i\hat{A}}\right),$$

donc

$$AB' \cdot OH = AB' = |\alpha - \beta| = R^2 \left|\left(\alpha / \alpha\overline{\alpha}\right) - \left(\overline{\beta} / \beta\overline{\beta}\right)\right|$$

$$= R^2 \left|\left(1/\overline{\alpha}\right) - \left(1/\beta\right)\right| = R^2 \left|e^{2i\hat{B}} - e^{2i\hat{A}}\right|$$

$$= R^2 \left|e^{i\left(\hat{B}+\hat{A}\right)} \cdot \left(e^{i\left(\hat{B}-\hat{A}\right)} - e^{-i\left(\hat{B}-\hat{A}\right)}\right)\right| = 2R^2 \left|\mathrm{siu}\left(\hat{B} - \hat{A}\right)\right|$$

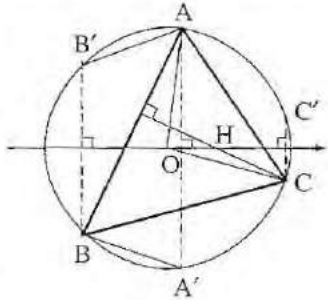
AUTRES SOLUTIONS : Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95-SARCELLES), Jacques DAUTREVAUX (06-St André), Edgard DELPLANCHE (94-Créteil), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Alain LARROCHE (06-Nice), René MANZONI (76-Le Havre), André MARCOUT (10-Ste Savine), Charles NOTARI (31-Montaut), Serge

PAICHARD (53-Laval), Marguerite PONCHAUX (59-Lille), Raymond RAYNAUD (04-Digne), Olivier ROUSTANT (69-Lyon), Jean-Paul ROUX (42-Unieux), Michel TIXIER (80-Amiens), André VIRICEL (54-Villers lès Nancy)

REMARQUES

Merci vivement aux quatre lecteurs qui ont pensé à cette utilisation des nombres complexes, ce fameux problème 245 sur lequel j'ai passé bien des nuits blanches : c'est effectivement cela que j'avais moi-même en tête.

Mais en l'occurrence, ce n'était pas la solution la plus simple : la méthode purement géométrique qu'ont utilisée les trois quarts des lecteurs, avec plus ou moins de calculs, quelques variantes (produit scalaire $\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{OH}$, développement trigonométrique de $\sin(\hat{B}-\hat{A})$, etc...), est en définitive plus rapide.



Elle se ramène à dire que, dans le cercle circonscrit à ABC, donc à ABB′, la corde

$AB' = 2R\sin(\widehat{ABB'}) = 2R\sin(\widehat{CHO})$

vu que CH est perpendiculaire à AB et HO à BB′. Or dans le triangle CHO,

$$\frac{\sin(\widehat{CHO})}{CO} = \frac{\sin(\widehat{OCH})}{OH}$$

d'où le résultat, puisque $CO = R$ et $\widehat{OCH} = |\hat{B}-\hat{A}|$.

Ajoutons que le cas du triangle équilatéral ne pose pas vraiment problème : comme, alors, $OH = 0$ et $\sin(\hat{B}-\hat{A}) = 0$, pour n'importe quelle droite d'Euler l'égalité est trivialement vérifiée.

ÉNONCÉ N° 266 (Nahum-Patrick BENMOUSSA, 95-Sarcelles, d'après oral Polytechnique)

A tout entier $n \geq 2$, on associe son plus grand facteur premier $p(n)$. Pour α réel, étudier la convergence de la série de terme général $1 / (n{\cdot}p^{\alpha}(n))$.

SOLUTION

C'est Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles) qui m'a transmis cet énoncé repéré par son collègue Nahum-Patrick BENMOUSSA parmi ceux posés à l'oral de Polytechnique (dans le cas particulier $\alpha = 1$). Signalons qu'un des lecteurs a manifestement confondu $p(n)$ avec p_n, n-ième nombre premier, car il n'a pas utilisé la notation fonctionnelle, bien commode en l'occurrence.

Il est immédiat que, pour $\alpha \leq 0$, la série est minorée par la série harmonique, donc divergente. Reste à prouver qu'elle converge pour $\alpha > 0$.

La démonstration se scinde clairement en deux parties : la première, indépendante de α, consiste à réorganiser la série en regroupant les entiers n tels que $p(n) = q$ (q, p, p_i... désigneront, dans toute la démonstration, obligatoirement des nombres premiers), pour la majorer par une autre série $\sum\limits_{q \text{ premier}} \frac{\Pi_q}{q^{1+\alpha}}$: hormis deux solutions fausses, toutes les démonstrations reçues (de Jean-Christophe LAUGIER, 17-Rochefort ; René MANZONI, 76-Le Havre ; Pierre RENFER, 67-Ostwald ; et bien sûr Marie-Laure CHAILLOUT) sont passés par là. Vient ensuite la majoration de Π_q : c'est là que les méthodes varient suivant la majoration cherchée, donc la valeur de α.

Dans la première partie de la démonstration, pour tout nombre premier p, $\frac{p}{p-1} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p^i}$ est la somme des inverses de tous les entiers n'ayant pas d'autre facteur premier que p. Si p et p' sont deux nombres premiers, en développant le produit des sommes on voit que $\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{p'}{p'-1}\right)$ est la somme des inverses de tous les entiers n'ayant pas d'autre facteur premier que p ou p', et plus généralement la somme des inverses de tous les entiers n'ayant pas de facteur premier supérieur à q est : $\prod\limits_{p \leq q} \frac{p}{p-1}$, ce que nous noterons désormais Π_q. Tout entier n tel que $p(n) = q$ étant le produit de q par un entier n'ayant pas de facteur premier supérieur à q, la somme des inverses de tous les entiers n tels $p(n) = q$ vaut donc Π_q/q.

Dans la somme partielle $S_X = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n \cdot p^{\alpha}(n)}$, si je regroupe les termes n ayant même $p(n) = q$, il est clair que $q \leq n \leq X$ et que la somme des inverses des entiers inférieurs à X tels que $p(n) = q$ est majorée par la somme des inverses de tous les entiers tels que $p(n) = q$, donc par Π_q/q. La somme partielle S_X est donc majorée par $\sum_{q \text{ premier} \leq X} \frac{\Pi_q}{q^{1+\alpha}}$, et c'est de cette dernière somme qu'on va s'efforcer de prouver la convergence.

Reste, pour ce faire, à majorer Π_q. Dans le cas $\alpha = 1$ (ou, pour le moins, $\alpha > 1/2$), Marie-Laure CHAILLOUT propose une majoration élémentaire : $\Pi_q \leq \sqrt{3q}$, reposant sur le fait qu'à partir de $p_i = 5$, deux nombres premiers consécutifs p_{i-1} et p_i diffèrent d'au moins 2, si bien qu'on peut majorer $p_i/(p_i - 1)$ par $\sqrt{p_i/p_{i-1}}$, vu que : $p_i - 1 > \sqrt{p_i \cdot (p_i - 2)} \geq \sqrt{p_i \cdot p_{i-1}}$ ... et tout se simplifie téléscopiquement !

Dans le cas général $\alpha > 0$, on trouve, certes, dans la littérature des résultats classiques comme le théorème de Mertens selon lequel : $\Pi_q = e^{\gamma}.\ln(q) + o(1)$, ($\gamma$ est bien la constante d'Euler, comme le suspecte René MANZONI), mais si l'on n'a pas ces résultats à portée de main, est-on totalement démuni ?

Pas totalement. Pierre RENFER propose une majoration élémentaire : $\ln(\Pi_q) \leq 2\sqrt{\ln(q)} + c$, suffisante pour notre problème car elle permet d'affirmer que, pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, $\Pi_q < q^{\varepsilon}$. Après avoir majoré $\ln(\Pi_q) \leq \sum_{p \leq q} \frac{1}{p} + c_1$, Pierre RENFER écrit que dans le carré $\left(\sum_{p \leq q} \frac{1}{p}\right)^2$, les termes $\frac{1}{p^2}$ et $\frac{2}{pp'}$ sont tous distincts (du fait de l'unicité de décomposition en facteurs premiers), ce carré est donc majoré par $2\sum_{k \leq q^2} \frac{1}{k} \leq 2\,(\ln(q^2) + 1)$.

Mais la méthode élémentaire suivante fournit une majoration encore meilleure. Le coefficient binomial $C_{2N}^{N} < 2^{2N}$ étant divisible par tous les nombres premiers p strictement compris entre N et 2N, $\prod_{N<p\leq 2N} p < 2^{2N}$. Dès lors, s'il y a K nombres premiers entre N et 2N, $N^K < 2^{2N}$, soit : $K < \frac{2N\cdot\ln(2)}{\ln(N)}$. Or $\prod_{N<p\leq 2N} \frac{p}{p-1} \leq \left(\frac{N+1}{N}\right)^K < e^{\frac{K}{N}} < e^{2\frac{\ln 2}{\ln N}}$. En particulier, $\prod_{2^j<p\leq 2^{j+1}} \frac{p}{p-1} < e^{2/j}$, ce qui entraîne : $\prod_{2<p\leq 2^{j+1}} \frac{p}{p-1} < e^{(2+(2/2)+(2/j))}$. Or comme pour tout entier i, $\frac{1}{i} < \ln\left(\frac{i}{i-1}\right)$, on a : $2+\frac{2}{2}+\ldots+\frac{2}{j} < 2+2\ln(j)$, soit, en ajoutant à la liste $p = 2$: $\prod_{2\leq p\leq 2^{j+1}} \frac{p}{p-1} < 2e^2 j^2$. Plus généralement, tout entier q étant compris entre deux puissances consécutives de 2 : $2^j < q \leq 2^{j+1}$ avec $j < \ln(q)/\ln(2)$, $\Pi_q < C\cdot\ln^2(q)$, avec $C = 2\,e^2/\ln^2(2)$.

La série de terme général $1/n\cdot p^{\alpha}(n)$ est donc majorée par : $C\cdot \sum_{q\text{ premier}} \frac{\ln^2(q)}{q^{1+\alpha}}$, et *a fortiori* par $C\cdot \sum_{m\text{ entier}} \frac{\ln^2(m)}{m^{1+\alpha}}$, qui converge pour tout $\alpha > 0$.

Quant à l'étude plus précise de la convergence, donc du comportement asymptotique du reste de la série, c'est un tout autre problème, bien plus difficile... On peut peut-être s'en sortir avec la fonction de Dickman : $\rho(t)$ = proba ($p(n) < n^{1/t}$), qui vérifie l'équation : $t\rho'(t) + \rho(t-1) = 0$, mais cela dépasse très largement les dix pages imparties à la présente rubrique.

DRÔLE DE SUITE

Soit (u_n), $n \in \mathbf{N}$, une suite réelle vérifiant, pour tout entier naturel n, la relation :

$$u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n.$$

Montrer qu'il existe un entier p non nul tel que la relation $u_n = u_{n+p}$ ait lieu pour tout entier naturel n.

... *C'est un exercice du Concours Général traité dans Panoramath 2.*