Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.
Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune, et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie si vous souhaitez son retour) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS.
par internet : rferreol@club-internet.fr

Plusieurs avis de recherche n'ont pas reçu de réponse, par exemple les deux suivants...

Avis de recherche n° 99 de Jean-Mathieu Bernat
Combien peut-on placer de points dans un disque de rayon 2, l'un étant au centre, de sorte que leurs distances mutuelles soient toujours supérieures ou égales à 1 ?
Réponse d'Erdös : 20. Pourrais-je avoir une démonstration ?

Avis de recherche n° 100 de M. Massé (Chartres)
Est-il possible de connaître l'origine historique de l'adjectif « relatif » dans l'expression : les entiers relatifs ?

NOUVEAUX AVIS DE RECHERCHE

Avis de recherche n° 106 de François Duhoux (famille.duhoux @wanadoo.fr)
Un problème de chèvre (un de plus).
Une chèvre est attachée par une corde à l'un des sommets d'un pré carré de côté *a*. Sa corde lui permet de brouter à une distance au plus égale à *a*/2, et, bien sûr, l'herbe ne repousse pas derrière elle. Lorsqu'elle n'a plus d'herbe à brouter, on déplace son point d'attache dans le pré pour lui permettre de s'adonner à son activité favorite, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle ait tout rasé. Quelle est la longueur minimale de la ligne brisée ainsi créée entre le premier et le dernier point d'attache (ou à défaut trouver des valeurs aussi petites que possible) ?

NDLR : je signale qu'il y a un joli problème de chèvre (attachée cette fois au mur d'un silo circulaire) dans le dernier numéro de Quadrature (n° 35) page 43.

Avis de recherche n° 107 de François Duhoux

Comment démontrer que, sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\sqrt{\tan^2 x + 4\frac{\cos^2\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2 x}} = \tan x + \tan\left(\pi - \frac{x}{3}\right) + \tan\frac{\pi - x}{3}$$

et

$$\sqrt{\tan^2 x + 4\frac{\cos^2\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2 x}} = \tan\frac{\pi + x}{3} - 2\tan x.$$

Avis de recherche n° 108 de J.L. Maltret (Marseille)

Soit la matrice M_n d'ordre n définie par :

$$\begin{cases} a_{i,1} = a_{1,j} = 1, \\ a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1} \end{cases}$$

(triangle de Pascal tourné de $\pi/4$) ; montrer que le polynôme caractéristique de M_n est réciproque (autrement dit les valeurs propres sont deux à deux inverses l'une de l'autre).

Avis de recherche n° 109 de J.L. Maltret.

Dans un article de Pour la Science sur Piero della Francesca, il est question d'un polyèdre convexe à 72 faces, 24 triangles isocèles et 48 trapèzes isocèles. Comment est formé ce polyèdre ?

Avis de recherche n° 110 de Pierre Marie Charrière (Massougy, pierre.marie.charriere@edu.ge.ch)

Je cherche une vidéo d'un tour de magie de David Copperfield concernant une énigme à résoudre dans un train. L'émission date de quelques années ! Je me souviens que le téléspectateur choisissait une case sur un échiquier 4 sur 4 puis, après avoir respecté les indications du magicien, il ne restait qu'une case ; le magicien désignait alors cette case. Je pense que ce sketch pourrait servir de base à un exercice mathématique.

RÉPONSES AUX AVIS DE RECHERCHE PRÉCÉDENTS

Avis de recherche n⁰ 98 .

La suite (n sin n) est-elle dense dans R ?

N'ayant pas reçu de réponse à cet avis de recherche, j'ai posé la question sur le site internet « ask doctor math » (http://forum.swarthmore.edu/ dr.math/) et j'ai eu accès à une réponse qui avait été donnée à cette même question posée récemment dans le forum sci.math.research.

Voici la traduction de ce texte envoyé par Robert Israël, University of British Columbia, Vancouver, BC, Canada V6T 1Z2, http://www.math.ubc.ca/~israel.

« Je pense que la réponse à cette question est actuellement inconnue.

Prenons en effet le problème plus simple de savoir si 0 est une valeur d'adhérence de (n sin n) ; pour montrer que lim inf $|n \sin n| = 0$, on a besoin de connaître de bonnes approximations rationnelles de π : pour tout $c > 0$, il doit exister des entiers m et $n > 0$ tels que $|\pi - n/m| < c/m^2$. Ceci est équivalent au fait que le développement en fraction continue de π ait des coefficients non bornés, ce qui n'est pas connu, bien que l'on sache que presque tout réel a des coefficients non bornés.

Pour la densité de (n sin n), on a besoin de la condition plus forte : pour tout $c > 0$ et tout réel t, il doit exister des entiers m et $n > 0$ tels que $|\pi - n/m - t/m^2| < c/m^2$. Cela impliquerait en particulier que, pour tout entier $k \geq 2$, il y ait une infinité de coefficients du développement de π qui soient égaux à k ou k+1… ».

Un lecteur aurait-il envie de démontrer ces jolies affirmations ou de faire des expérimentations numériques pour savoir si on peut quand même raisonnablement conjecturer que cette suite est dense ?

Avis de recherche n⁰ 101.

Autour d'un triangle équilatéral de côté unité, on circonscrit successivement des polygones réguliers de 4, 5, 6, ..., n, ... côtés les uns dans les autres, d'aire minimale. Quel est le rayon du cercle, s'il existe, qui est limite des polygones circonscrits ?

François Duhoux a trouvé dans la merveilleuse CRC concise encyclopedia of mathematics (que tout lecteur de cette rubrique a forcément achetée), page 1400, une réponse à un problème similaire : au lieu d'inscrire les polygones les uns dans les autres directement, on inscrit un cercle entre chacun. Le rayon limite est alors la constante des polygones circonscrits :

$$K = \prod_{n \geq 3} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} = 8{,}700036625...$$

La constante de Robert Timon est donc finie, et < 8,7...

Avis de recherche n° 103

De nombreux lecteurs savaient que le savant recherché est l'astronome danois Tycho Brahé (1546-1601).

Ceci est indiqué, par exemple, dans « La Grande encyclopédie du dérisoire », de Bruno Léandri, Editions Audie - Fluide Glacial, 1994, Chapitre 5, « Histoire et Géographie », « Les morts stupides de gens célèbres », p. 151-152.

Voici, extrait du livre « Les somnambules » d'Arthur Koestler (Le livre de poche, édition 1967, p 365 - 4ème partie, chapitre V « Tycho Brahé et Képler »), le récit de la main de Képler :

« Le 13 Octobre [1601], Tycho Brahé, en compagnie de maître Minkowitz, dîna à la table de l'illustre Rosenberg, et retint son eau plus que ne l'exige la politesse. Comme il but encore, il sentit augmenter la tension de sa vessie, mais il préféra la politesse à la santé. En rentrant à la maison, il put à peine uriner. »

Képler décrit ensuite l'évolution de la maladie et la mort de Tycho Brahé le 24 octobre 1601. Koestler note, avant cet extrait : « ...on devait être en très noble compagnie. Mais Tycho avait eu des rois chez lui et il avait l'habitude de beaucoup boire : on comprend mal pourquoi il ne sut pas se tirer de la désagréable situation dans laquelle il se trouva. »

On trouvera sur internet à http://www.fysik.lu.se/~pixejean/tycho/htm, un texte intitulé : Did mercury poisoning cause the death of Tycho Brahé ?

Tycho Brahé est l'inventeur d'un système des planètes intermédiaire entre le système de Ptolémée (la terre au centre) et le système de Copernic. Pour lui, le soleil tourne autour de la terre, mais les autres planètes tournent autour du soleil. Il est surtout le promoteur de la précision des observations astronomiques et de l'observation tenace du ciel.

Didier Nordon, dans son bloc-notes, Pour La Science, juin 99, mentionne cet épisode en transcrivant le commentaire suivant, dû à Frank Sulloway (Les enfants rebelles, Odile Jacob, 1999) : « Un homme incapable d'une entorse aux bonnes manières, fût-ce pour satisfaire un besoin naturel, n'était pas apte à défier les fondements de la cosmologie. » (NDLR : tout le monde n'est quand même pas précurseur de Képler !).

Avis de recherche n° 105
Le terme « anneau » vient de l'allemand Ring.
Quelqu'un connaîtrait-il la raison pour laquelle on a choisi ce terme ?

Réponse de Xavier Oudot <xoudot@club-internet.fr>.
Je pense que « anneau » est un synonyme de groupe, bande, club (cf. tribu, clan, ...). Le mot Ring, en allemand comme en anglais, peut avoir ce sens. La traduction française la plus fidèle serait plutôt cercle (penser au cercle militaire, au cercle des poètes disparus, ...), mais ce mot étant utilisé de façon très précise en géométrie, on a dû préférer une traduction littérale (anneau), qui perd le sens initial de rassemblement.

Réponse de J. M. Nicolas " <j-m-nicolas@ac-nancy-metz.fr>.
Je pense que « anneau » fait allusion aux relations qui unissent les différents éléments d'un ensemble, comme sont unis les différents maillons d'une chaîne. Ainsi, par exemple, l'anneau des Niebelungen est un ensemble d'opéras de Wagner (en allemand : Ring der Niebelungen). Nous pouvons voir la chaîne fermée : c'est un cycle ; on appelle romans cycliques un ensemble de romans où des personnages réapparaissent ; exemple : les Rougon Macquart, histoire naturelle et sociale d'une famille sous le Second Empire, œuvre maîtresse de Zola.
En Anglais, c'est le même mot : ring, qui est passé en français ; c'est l'endroit fermé, délimité par des cordes où se produisent des lutteurs (lutter se dit en Allemand « ringen ».

Réponse de Pierre Renfer (Ostwald)
Aucun Français n'a de difficulté pour trouver l'intrus dans la liste de mots suivante : « ensemble, collection, classe, groupe, anneau, corps, champ, espace ». Mais un Allemand cultivé pourra hésiter pour trouver l'intrus dans la liste originelle : « Menge, Sammlung, Klasse, Gruppe, Ring, Feld, Raum ». Le vieux mot germanique Ring n'a pas seulement le sens usuel d'anneau. C'est aussi un vieux terme militaire pour désigner une enceinte fortifiée, comprenant non seulement la palissade frontière mais aussi l'espace protégé intérieur. On retrouve ce sens dans l'anglais ring qui désigne l'espace circonscrit par les cordes, où s'ébattent et se battent les boxeurs.