Dossier : orientations pour l'enseignement des maths

Intégrisme / Laxisme

Daniel Reisz

Le débat sur l'utilisation explicite dans l'enseignement secondaire des quantificateurs et autres symboles logiques semble refaire surface. Il s'inscrit dans un débat plus large, celui de nos exigences en matière de rigueur et de démonstration. Caricaturalement, il y a deux camps : les intégristes et les laxistes, les tenants d'une mathématique hard et ceux d'une mathématique soft, les amateurs de produits entiers et ceux de produits allégés...

Je voudrais d'abord rappeler quelques points d'histoire. Lors des années 70, à l'instigation de nombreux universitaires bourbakistes, nous avions introduit dans l'enseignement secondaire (et même élémentaire) une certaine dose de matbématiques formalisées qui se traduisaient souvent par des contraintes très strictes de notations et d'écritures. Cette réforme, comme celle qui a suivi dans les années 80 et qui abandonna largement ce point de vue pour s'appuyer sur d'autres idées-force (dialectique entre problèmes et outils théoriques, aspects expérimentaux des mathématiques, progressivité de l'exigence de formalisation en fonction des besoins, ...), était pavée d'excellentes intentions scientifiques et didactiques. Et chacun, naïvement, pensait à chaque fois que nous allions régler l'essentiel de nos difficultés didactiques et pédagogiques. (D'aucuns, dont j'étais, ont été acteurs des deux réformes avec beaucoup d'honnêteté et de bonne conscience, d'autres, les éternels sceptiques, se sont opposés aux deux, sans toujours clairement pouvoir dire ce que seraient leurs propres choix.)

Tout cela se greffe sur de profondes évolutions socio-éducatives. Après la fusion des cours complémentaires et des premiers cycles de lycée en un unique collège où on allait scolariser la totalité de la population concernée, nous avons assisté à partir de la fin des années 70 jusqu'aux années 90, à une forte et rapide massification de la population scolarisée au lycée. Ces deux chocs quantitatifs ont, par simple effet mécanique, fait monter le niveau moyen d'instruction d'une classe d'âge, fait baisser le niveau moyen des élèves scolarisés et augmenter l'hétérogénéité de ces derniers. Il a été nécessaire d'adapter nos exigences et notre fonctionnement pédagogique aux possibilités et aux mœurs sociales de cette nouvelle population scolaire. Et, là encore, il y a parmi nous des tenants de deux politiques différentes : filières multiples au nom de la diversité de motivations, de projets, de possibilités des élèves, au nom de l'efficacité pédagogique de classes homogènes, mais aussi avec le risque de voir apparaître des filières impasses, des filières poubelles, à côté de filières élitistes, des filières socialement discriminantes ou un enseignement commun à des classes plus hétérogènes par souci d'intégration, de socialisation, même si c'est au détriment d'une certaine efficacité aux deux extrêmes (les meilleurs et les moins bons). Et toutes ces évolutions relèvent de choix politiques et sociaux qui ne nous appartiennent pas en tant que professeurs de mathématiques, si tant est qu'ils nous appartiennent en tant que citoyens ou parents. Que demande la société au collège, au lycée, à l'École en général ? Instruire, éduquer, animer, socialiser, professionnaliser ? Peut-être tout cela à la fois avec, selon les époques et les modes médiatiques, une priorité à ceci ou à cela !

Je voudrais aussi préciser ma position didactique, car il s'agit là d'un choix idéologique, c'est-à-dire de certitudes personnelles et non universelles. Je ne crois pas que la mise en place, *a priori*, d'un langage très formalisé facilite, pour l'apprenant, sa capacité de faire fonctionner les mathématiques. Je m'oppose en cela à ceux qui pensent qu'il faut d'abord mettre les choses en place, avec un maximum de rigueur et de précision et qu'ensuite la mise en fonctionnement sera d'autant plus facile et efficace que la mise en place aura été plus rigourense et soignée. Et je voudrais enfoncer le clou : il n'y a pas là une simple option vaguement pédagogique, mais un choix qui sous-tend nne vision des mathématiques et une conception de leur didactique. Cela mérite débat, et, souvent, nous nous y lançons avec délice, mais il nous faut aussi enseigner et cela exige un consensus minimal inspiré par l'une des conceptions (et il n'y a pas que ces deux conceptions que j'oppose ici de façon nn peu sommaire). Le consensus et les choix adoptés oscillent avec le temps, ce qui est normal dans un corps social vivant. Sans parler d'une difficulté majeure, l'existence d'élèves réels, assez différents de ces élèves abstraits dont nous parlons si souvent... Et si chacun a sur eux des certitudes, celles-ci ne sont pas les mêmes pour tous.

Ma position sur les exigences en matière de raisonnement, de quantification, de logique, part ainsi de trois « certitudes personnelles » sur les élèves :

- l'acte d'écrire devient de plus en plus étranger à la vie quotidienne et professionnelle de la plupart des personnes et des élèves en particulier ; sa fonction est de plus en plus exclusivement scolaire. Et l'écriture elle-même change : quel rapport entre la rédaction bien léchée d'une démonstration, un article de L'Équipe et le jargon des internautes ?
- dans un contexte qui leur est familier (que ce soit le football, la menuiserie ou la comptabilité) les gens en général et les élèves en particulier « pensent juste » ;
- il faut du temps, des situations critiques, des succès et des échecs pour avancer dans l'élaboration et la consolidation des connaissances et des démarches.

Et aussi d'une « certitude personnelle » sur le métier de professeur, ce métier de tous les dangers : celui-ci a toujours raison de pousser l'ensemble de ses élèves vers une exigence de pensée juste et rigoureuse, vers une exigence d'énonciation claire et explicite de cette pensée, vers une valorisation fonctionnelle de la trace écrite, *à condition* (et c'est là que l'équilibre est délicat à tenir) que ces exigences ne soient jamais telles qu'elles ne bloquent l'élève, qu'elles participent à la construction de son échec scolaire, qu'elles accroissent son exclusion d'un monde culturel, lui laissant comme seule alternative de les ignorer (au mieux) ou de se révolter contre de telles « valeurs ».

Prenons l'exemple de propositions quantifiées. Rappelons-nous d'abord que, dans les années 70, un élève était censé lire (voire comprendre !) des choses comme

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } |x - a| < \alpha \text{ implique } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

et de prendre sa contraposée

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall\, \alpha > 0,\ \exists\, x \in\ ]a - \alpha, a + \alpha[\text{ vérifiant } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

(extrait du manuel de T.C. de VISSIO, p. 147 et 150, édition de 1971)

Soyons francs ! Même à cette époque, cela restait purement liturgique pour la plupart des élèves et ne fonctionnait guère au sein de démarches de résolution de problèmes (si ce n'est chez quelques petits génies que je n'ai d'ailleurs jamais rencontrés). *A fortiori*, il ne me semble ni souhaitable, ni utile aujourd'hui que de telles écritures soient considérées comme faisant partie du bagage d'un bachelier pour lequel nous en restons à une formation mathématique très généraliste.

Pour parler plus généralement de ce qui concerne le raisonnement, la rigueur et le statut de la démonstration, constatons d'abord, que ce soit au lycée ou au collège, que ce soit dans les manuels ou dans les classes, des fonctionnements mathématiques où rigueur, démonstration, justification, preuve, ... ont des statuts assez variables. Que cela soit le cas dans le quotidien d'une classe où il y a des moments très différents d'exigence est non seulement normal, mais souhaitable à condition d'en être pleinement conscient : il faut aussi savoir lâcher la bride, laisser la place à des idées encore mal formulées, un peu confuses... Et gardons-nous dans nos discours comme dans nos actes de tout nihilisme qui consisterait à prôner ou à dénoncer un enseignement « où on ne démontre plus rien ». Combien de fois entend-on : « On ne sait plus si telle ou telle assertion est démontrée, à démontrer, admise, constatée ! Et, d'ailleurs, à force d'être vague, les élèves finissent par s'en f .... que ce soit démontré ou admis ». Ces phrases, maintes fois entendues dans des salles de professeurs, dans des réunions, sont presque toujours excessives ; elles révèlent néanmoins un réel malaise.

Soyons clairs ! D'un point de vue disciplinaire et culturel, notre responsabilité spécifique, sinon exclusive de professeurs de mathématiques est au moins double :
- transmettre un savoir mathématique,
- apprendre à « penser juste » et à formuler une telle pensée.

Le deuxième objectif doit absolument être explicité et donner lieu à un consensus entre nous : un professeur doit se sentir confortablement installé dans sa légitimité lorsqu'il poursuit cet objectif et cela quel que soit le niveau d'enseignement. Et, en même temps, on ne saurait reprocher au même professeur d'oser parfois sortir d'une démarche rigoureuse, mais qui est source de blocage, d'incompréhension, pour permettre aux élèves à retrouver sens et dynamisme à leurs activités, même si c'est au détriment d'un certain formalisme de style ou de notation. Cela peut sembler banal et, pourtant, il existe parmi nous des collègues qui culpabilisent, les uns pour leur trop grand souci de rigueur, d'autres pour leur trop grand laxisme en cette matière. Il en existe aussi qui penchent, avec d'excellentes raisons, trop d'un côté ou de l'autre.

Je voudrais encore avancer l'idée suivante : la plupart des personnes raisonnent juste dans les contextes qui leur sont familiers. Je m'occupe actuellement de populations particulièrement défavorisées dont les préoccupations sont très éloignées des mathématiques. Je n'ai jamais entendu l'un d'eux me dire : « Aucun coureur ne se drogue ! » lorsqu'il voulait contester mon « Tous les coureurs se droguent ! » Au contraire, j'ai toujours pour réponse une variante de « Pas tous, il y en a qui ne se droguent pas ! » ou encore « Tu ne vas pas me dire que X se drogue ». Voilà de parfaites contraposées d'une assertion quantifiée.

Au fond, il me semble qu'il y a un fossé didactique important entre un usage correct, mais non formalisé de la démonstratiou, de la quantification et une formalisation de ces processus, formalisation qui a incontestablement son intérêt, mais qui ne peut venir qu'après un temps de latence assez long, plus souvent en termes d'années que de semaines.

Alors, en matière de didactique de ces questions de démonstration, de quantification, je verrai plusieurs stades.

D'abord un stade oral de débat : entre élèves (le rêve) ou entre prof et élèves se noue un débat contradictoire qui permet de faire ressortir tel ou tel aspect du fonctionnement de la quantification ou de la démonstration. De telles situations sont innombrables et quotidiennes au collège, voire à l'école élémentaire, en mathématiques, mais aussi hors des mathématiques. Faisons toutefois attention à ne pas trop mélanger le statut mathématique et d'autres statuts : il y a des différences entre une vérité mathématique, une vérité expérimentale, une vérité de bon sens, entre causalité et implication, entre constat et démonstration,... Je me bornerai à quelques exemples de phrases d'ordre mathématique :
- Tous les triangles ont au moins un angle aigu.
- Tous les triangles ont au moins un angle obtus.
- Il y a des triangles qui ont un angle aigu.
- Certains triangles ont un angle obtus.
- Des triangles ont deux côtés égaux.
- Tous les triangles équilatéraux (resp. isocèles) sont isocèles (resp. équilatéraux).

De telles phrases ont un statut (correct) grammatical, un statut sémantique (toutes ont un sens précis), un statut matbématique (en terme de « vérité » au sens interne à notre discipline). Elle peuvent, elles doivent être justifiées ou récusées. C'est dans ce contexte que le rôle du contre-exemple peut s'introduire, mais n'oublions pas que le statut du contre-exemple en maths n'est pas le même qu'en grammaire ou en sciences expérimentales (où l'exception peut confirmer la régle). Historiquement ou trouve jusqu'au XIX^{e} siècle des mathématiciens aussi prestigieux que Cauchy ou Hermite faire une différence entre contre-exemple et « exemples monstrueux » dont on ne tiendra pas compte.

Toujours à l'oral, on peut ensuite faire sentir une exigence de plus en plus forte pour justifier la quantification, l'implication, l'équivalence logique, la négation sous-jacentes. C'est ainsi qu'on peut attirer l'attention sur la synonymie d'expressions comme « il y en a », « il en existe », « pas tous », sur la manipulation des « donc », « d'où » et autre « si … alors… ». Là encore, le collège est sans doute le lieu privilégié d'un tel dégrossissage.

On arrive ensuite à la nécessité de passer à l'écrit, ce qui est en soi une difficulté socio-culturelle redoutable dans un monde de plus en plus « audio-visuel ». Les mathématiques, elles, sont très étroitement liées à l'écrit. La première ambition, déjà délicate, sera de faire accepter que le consensus argumentatif clarifié auquel on aura abouti oralement soit consigné par écrit (idée d'une trace définitive, d'un constat d'accord). Laissons, dans un premier temps, de côté toute contrainte stylistique que nous aimerions imposer, souvent avec de bonnes raisons, aux élèves. Soyons très tolérants quant à la mise en page si on veut éviter le divorce entre travail scolaire imposé (et refusé) et la simple consignation d'un accord.

Un deuxième stade écrit, dont la nécessité devrait apparaître assez vite aux élèves au fur et à mesure que les situations se complexifient, réside dans l'intérêt d'une certaine « réglementation » tant au niveau de la présentation qu'à celui de la formulation. Mais ne soyons pas dupes : cette étape, possible au collège, sera loin d'être achevée à ce niveau et, tout au long du lycée, il sera nécessaire de faire évoluer progressivement les pratiques avec exigence, mais avec une exigence qui soit jouable, qui ne paralyse pas l'élève, qui ne rompe pas le fil avec ses propres besoins et motivations.

Un dernier stade serait celui de la formalisation. Il y a des adeptes d'une introduction précoce d'une écriture formalisée : des règles simples, rigides, sécurisantes, une clarification et une automatisation du fonctionnement. L'expérience des années 70 n'a pas été concluante quant à l'efficacité didactique d'un tel choix. Certes on peut estimer qu'une écriture formalisée est un objectif à atteindre en soi, un savoir à transmettre. Je reste convaincu qu'un tel objectif relève plutôt d'une période de spécialisation post-bac. Si déjà nous arrivions à ce que la plupart de nos élèves « énoncent clairement ce qui se conçoit bien »…

Mais ai-je moi-même énoncé clairement… Et puis comment traduire en termes de programmes, classe par classe, une telle progressivité de comportement qui nécessite une vision et un consensus longitudinal de nos progressions et de nos exigences ? C'est là qu'un travail d'équipe au sein d'un établissement, la formation initiale et continue, encore plus que les textes officiels, seront efficaces. Ce qui n'empêche pas que de telles perspectives soient développées et légitimées dans des textes officiels.