Dossier : orientations pour l'enseignement des maths

Les quantificateurs, ces mal-aimés

André Martino

Suite à la réforme dite des « maths modernes », des dérives ont été constatées dans l'emploi des quantificateurs (emploi abusif ou bien en tant qu'abréviation). Actuellement, c'est tout le contraire qui se produit et les symboles de quantification $\forall$ (pour tout) et $\exists$ (il existe) ont été quasimeut éradiqués de l'euseignement secondaire. L'explication habituelle est la suivante : il vaut mieux que les élèves prennent l'habitude de marquer « pour tout » ou « il existe » en toutes lettres afin d'éviter les dérives mentionnées ci-dessus. Pourtant, en pratique, on constate qu'il s'est créé une autre dérive complètement opposée à la première : les quantificateurs, même écrits en toutes lettres, ont teudance à disparaître ; ils sont alors remplacés par des sous-entendus implicites qui, s'ils sont clairs pour un mathématicien ou un élève à l'aise avec les mathématiques, sont à l'origine de confusions pour beaucoup d'autres.

Pourquoi cette absence de plus en plus grande de l'usage des quantificateurs ? Peut-être à cause d'une paresse naturelle : l'écriture in extenso est longue et répétitive, surtout lorsqu'on utilise le tableau. Pourquoi alors ne pas utiliser les symboles $\forall$ et $\exists$? Souvent par une crainte disproportionnée de la part de logiciens « puristes » qui trouveront tel ou tel emploi incorrect. Enfin, l'usage ce ces symboles comme abréviation provoque immédiatement des « cris d'horreur » (au fait, pourquoi ?) comme si ces A et E à l'envers étaient chargés d'une connotation magique ou maléfique (il en va ainsi, je crois, de certains symboles inversés en magie blanche ou noire).

Tout cela n'aurait pas grande importance si cette absence d'utilisation des quantificateurs n'était à l'origine de difficultés pour certains élèves. Que comprendre, lorsque l'on dit $f(x) \geq 0$? (est-ce que la fonction f de la variable x est positive pour toutes les valeurs de x ou est-ce qu'il existe un x pour lequel cette fonction prend une valeur positive ? Ou même, comme en probabilités, est-ce l'ensemble des x tels que $f(x) \geq 0$?) Comment dire le contraire ? Pourquoi, pour résoudre $x^2 + 3x + 2 = 0$, ne peut-on pas dériver cette équation par rapport à x ? Si l'intégrale de 0 à x d'une fonction f est nulle, que peut-on en déduire ? Il est bien clair que l'usage des quantificateurs ne va pas éliminer ces difficultés, mais leur usage (raisonnable) aura au moins l'avantage de signaler ces difficultés (un peu comme un panneau indicateur) et ainsi, d'attirer l'attention des élèves et de les sensibiliser à la dichotomie « pour tout / il existe ». Bien entendu, certains auront tendance à utiliser les quantificateurs comme abréviations ; cela ne constituerait-il pas alors un moindre mal, si cet usage avait permis de mettre en évidence des mécanismes de raisonnement ?

Par ailleurs, notons que la distinction « pour tout / il existe » a son importance pour d'autres objets que les objets mathématiques. Qu'il s'agisse de sciences physiques ou de sciences de la terre, de biologie ou d'économie, savoir distinguer, dans un contexte donné, les lois universelles de celles qui ne le sont pas et savoir le justifier, semble tout aussi crucial. Autrement dit, un bon usage des quantificateurs permet de schématiser des raisonnements dans des cadres très variés.

Finalement, en supprimant l'usage des symboles $\forall$ et $\exists$, on n'a pas supprimé les difficultés pour l'élève, mais simplement les représentations de ces difficultés ; en revanche, l'usage de ces symboles permet d'attirer l'attention sur celles-ci et, peut-être, de mieux les surmonter.