

Dossier : orientations pour l'enseignement des maths

Géométrie mentale

Nicolas Bouleau

Le calcul mental n'est pas limité au calcul numérique : on peut calculer mentalement des primitives, simplifier des expressions analytiques... Même s'il y a des logiciels qui font cela très bien, cet entraînement conserve une valeur pédagogique. Peut-on aller plus loin et envisager du calcul mental géométrique : procéder mentalement à des transformations de figures simples permettant de calculer des aires ou des volumes ?

Il se trouve que l'intuition qui permit à Archimède d'obtenir ses principaux résultats géométriques, si l'on n'en prend que les idées sans les lourdeurs d'expression, fournit justement l'occasion d'un jeu mental plaisant et assez riche que je présente ici sous forme d'un petit conte introductif. Non pas un conte philosophique car il n'amène aucune thèse, simplement un récit à ranger parmi les invitations à s'exercer l'esprit. Les personnages sont inspirés d'expériences vécues, est-ce qu'avec des élèves réels les choses iraient si facilement, je laisse le lecteur apprécier.

Souvent, sur les GR, je rencontre des collègues professeurs de mathématiques. Le goût pour la montagne est, semble-t-il, très partagé dans notre communauté. Un brin de conversation et, rapidement, on décèle certaines références communes. Occasion de faire une pause, de mettre les sacs à terre, eu évoquant les difficultés de l'enseignement et les joies de la botanique et de la géologie.

Une fois, c'était en Auvergne dans le massif du Sancy, en passant à la hauteur d'un groupe peu après le début du chemin, quelques mots « limite »,

« infiniment », ... ayant attiré mon attention, je m'enquiers discrètement et j'apprends qu'il s'agit d'une randonnée culturelle organisée par des professeurs de mathématiques, de philosophie et d'histoire avec leurs élèves suivant l'idée de faire apparaître des liens entre leurs disciplines dans un climat ouvert alliant réflexion par petits groupes durant la marche et discussion générale pendant les haltes. Je suis intéressé, on m'accueille. Le prof de philo m'explique que le thème de la randonnée de ce jour-là est issu de débats entre professeurs à propos de certaines difficultés des élèves. Il préconisait, quant à lui, davantage d'exercices d'expression écrite et orale suivant le principe que ce qui s'énonce clairement est la marque de ce qui se conçoit bien. Mais le prof de maths prétendait qu'il pouvait y avoir aussi une pensée sans mots, et s'appuyait pour cela sur un texte du mathématicien Hadamard que malheureusement ses collègues n'avaient pas lu. Il avait donc relevé le défi de faire la preuve de son affirmation et avait pris en main l'animation de la randonnée. C'était la première halte. Il commençait par des choses simples.

Le prof de maths – *Pourquoi l'aire d'un triangle ne change pas lorsqu'on déplace son sommet parallèlement au côté opposé ?*

Un élève – *Parce que l'aire est le demi-produit du côté par la hauteur.*

Le prof de maths. – *Voici une explication en effet, mais est-ce une véritable compréhension ? On peut comprendre l'invariance de l'aire au cours du mouvement. Que pensez-vous de l'argument suivant : coupons le triangle en fines tranches parallèles au côté fixe, lorsque le sommet se déplace, les tranches glissent les unes sur les autres. Nous voyons bien que l'aire est conservée.*

Un autre élève – *Mais il y a des petits escaliers aux bords qui font problème.*

Le prof de maths. – *Oui, cependant il est facile de se convaincre que ces problèmes sont d'autant moins graves que les tranches sont plus fines et qu'à la limite le raisonnement est parfaitement rigoureux. C'est cette intuition à laquelle je voudrais vous familiariser.*

Le prof d'histoire – *N'est-ce pas pour ce passage à la limite qu'Archimède utilise sa méthode d'exhaustion, fameuse méthode maintes fois mentionnée par les Latins, les Arabes et à la Renaissance ?*

Le prof de maths. – *En effet, Archimède raisonne ainsi : supposons que l'aire du triangle déformé dépasse d'epsilon l'aire du triangle de départ. En coupant celui-ci par des tranches suffisamment fines pour que la somme des aires des rectangles externes moins celle des aires des rectangles internes soit inférieure à epsilon, puis en déplaçant ces tranches rectangulaires pour obtenir un encadrement du triangle déformé, nous obtenons une contradiction dans les inégalités.*

C'est donc la méthode d'exhaustion qui assure notre passage à la limite. On pourra toujours s'y référer en cas de doute, mais le plus intéressant est de développer notre intuition car c'est elle qui enrichit nos capacités à agir. Je pose donc une nouvelle question. Pourquoi l'aire d'un cercle est-elle égale à la moitié de la circonférence multipliée par le rayon ?

Un élève – Je me doute que la réponse n'est pas de dire que ça fait πr^2 .

Un autre élève – Parce que si on découpe le cercle comme une tarte en fines parts, on peut le déployer en laissant les croûtes des parts voisines se toucher et s'aligner suivant un segment de droite égal à la circonférence. Les parts forment alors des dents de scie, si on ramène par la pensée toutes les pointes sur l'une d'entre elles parallèlement au segment de droite, par ce qu'on vient de voir à propos des triangles, l'aire est inchangée, on n'a plus qu'un seul triangle dont l'aire est l'aire cherchée.

Le prof de maths – Très bien, et vous sentez que l'erreur commise s'évanouit si les parts sont de plus en plus fines.

Le groupe se remet en marche. Avec une certaine impatience d'entendre la suite, on discutait. Les profs d'histoire et de philo évoquaient Euclide, Ératosthène et l'École d'Alexandrie, la naissance de la science grecque et les irrationnels... À la halte suivante, le prof de maths reprit son propos.

Le prof de maths – Parlons maintenant de volumes. Qui peut me dire pourquoi une colonne torse, comme on en voit dans les églises baroques, a même volume que la colonne droite de même base et de même hauteur ?

Une élève – C'est comme les empilements de tablettes de chocolat dans les devantures des confiseries.

Le prof de maths – Vous pouvez préciser ?

L'élève – Si les sections horizontales de la colonne torse sont des cercles identiques à la base, c'est évident par le raisonnement des tranches, de même qu'à partir d'une pile de pièces de monnaies on peut en les décalant obtenir une pile hélicoïdale de même volume et de même hauteur.

Le prof de maths – Et le volume d'un cône ? Il est maintenant clair qu'il ne change pas si on déplace son sommet dans un plan parallèle à la base, et que de plus il ne dépend pas de la forme de la base mais uniquement de son aire, comme on le voit en découpant celle-ci en petites parties et en considérant les petits cônes correspondants. Dès lors, que ce volume soit le tiers de l'aire de la base par la hauteur résulte de n'importe quel cas particulier, par exemple de ce qu'un cube se partage à partir de son centre en six pyramides égales.

Nous voyons aussi en partageant une sphère en petits cônes issus de son centre et en l'ouvrant comme une mangue ou une papaye, puis en ramenant toutes les pointes en une seule que le volume de la sphère est égal au tiers de

sa surface par son rayon. De même un polyèdre régulier circonscrit à une sphère est composé de cônes issus du centre de la sphère et son volume est donc égal au tiers de sa surface par le rayon de la sphère. Il est intéressant de noter que cette propriété est encore vraie si le polyèdre est irrégulier pourvu que toutes ses faces soient tangentes à la sphère même si le nombre des faces est infini comme pour le cylindre circonscrit à la sphère par exemple.

La prof d'histoire – *Vous êtes tout proche des résultats du traité de la sphère et du cylindre d'Archimède dont il était le plus fier si l'on en croit Plutarque.*

Le prof de maths – *Notre intuition peut maintenant les obtenir aisément. Considérons le cylindre circonscrit à une sphère et coupons-le par des tranches parallèles aux bases. Il se trouve que dans chaque tranche la portion de surface de la sphère découpée est égale à l'aire de la portion de cylindre découpée. C'est immédiat par un petit calcul si la tranche est infiniment mince. Donc c'est vrai, par exhaustion, si la tranche est quelconque. D'où il résulte que l'aire de la sphère est égale à l'aire latérale du cylindre qui est les deux tiers de l'aire totale du cylindre, bases comprises; d'où il suit, par ce qu'on a dit sur le volume de la sphère et celui des polyèdres circonscrits, que le volume de la sphère est les deux tiers du volume du cylindre.*

Le prof de philo – *Tout ceci ne saurait faire la preuve d'une pensée sans mots, car nous vous suivons, certes, mais vous employez bien des mots pour nous conduire dans vos constructions.*

La prof d'histoire – *Vous êtes en train de faire revivre la méthode dite des « indivisibles » du dix-septième siècle ainsi dénommée par l'Italien Cavalieri et perfectionnée par Roberval, mais il me semble qu'avec Fermat, Descartes, Leibniz, puis Newton, ces méthodes ont été supplantées par celles du calcul différentiel. A quoi bon revenir sur des idées dépassées ?*

Le prof de maths – *Je suis en train de vous montrer qu'il y a du calcul mental sans nombres, par la géométrie seule. Le calcul intégral a tué l'intuition des indivisibles, c'est dommage : il y avait là quelque chose d'intéressant. Quant à faire la preuve d'une pensée sans mots, je ne vois pas d'autres moyens maintenant que de laisser aller parmi les élèves l'intuition que j'ai suscitée pour voir si cette pensée se développe d'elle-même.*

Le groupe se remet en marche, mais cette fois, en silence. Personne n'osait parler. Déjà la surface molle et sensuelle des Monts d'Auvergne s'assombrissait à l'Est et les premières ombres se glissaient suivant des formes inattendues. Au bout d'une heure des éclats de voix s'échappaient ici et là.

Un groupe d'élèves – *Monsieur, nous avons le volume d'une portion de*

cylindre coupée par deux plans.

Le prof de maths – *Nous vous écoutons.*

Un des élèves – *Voilà. Considérons une sphère et partageons-la par des plans méridiens comme une orange ou comme des fuseaux horaires si vous préférez. Sur chaque fuseau l'équateur vient dessiner un arc. Déployons notre orange sur une table de sorte que les bouts d'équateur viennent toucher la table en s'alignant. Puis déformons par la pensée ces quartiers en déplaçant les segments qui constituent leur nervures en les translatant parallèlement au plan de la table pour les ramener sur l'un d'entre eux. La surface latérale est conservée ainsi que le volume total. Nous obtenons une portion de cylindre droit coupé par deux plans passant par une perpendiculaire à son axe. Je ne sais pas si ça porte un nom.*

Le prof de maths – *Bien. Ainsi nous voyons que si nous coupons un cylindre de révolution vertical par un plan passant par un diamètre de la base, le secteur, qui a la forme d'un onglet, a sa surface latérale proportionnelle à sa hauteur totale et de même pour son volume et votre raisonnement fournit les deux coefficients de proportionnalité.*

Le prof de philo – *Excusez-moi, j'aimerais voir une figure. La géométrie a toujours été faite avec des figures. Il est normal de s'exprimer avec des dessins : ce sont les formes ancestrales des symboles du langage. Les architectes et les ingénieurs font des tracés, les peintres aussi parfois. Ne peut-on pas dire que les figures sont à la géométrie ce que les formules sont à l'arithmétique ou l'algèbre?*

Le prof de maths – *Pas tout à fait. Les formules sont dans le registre du discret, les figures dans celui du continu. Il y a des questions de précision qui peuvent tromper, des implications apparentes qui ne sont pas des implications mathématiques. La géométrie est l'art de la pensée déductive sur des tracés. Quand on parvient à les manier, je crois que les figures mentales sont les seules qui soient logiquement parfaites.*

L'élève – *Mon raisonnement est uniquement fondé sur la déformation d'un quartier d'orange. Admettons qu'un tel quartier est une section de cylindre par deux plans. Nous utilisons simplement le fait que ni le volume, ni la surface latérale ne changent si on déplace l'arête parallèlement à l'axe du cylindre. C'est une généralisation de la propriété de l'aire d'un triangle de ne pas changer lorsqu'on déplace un sommet parallèlement au côté opposé.*

Le prof de philo ne disait rien. Il constatait que l'intuition de l'élève avait produit de la connaissance de même nature semblait-il que la science, maladroitement exprimée par les mots du langage ordinaire, mais dont la rigueur ne cédait en rien aux textes les plus aboutis. Cela signifierait que penser peut être une activité spontanée non maîtrisée. Il demanda aux élèves

ce qui avait fait germer leur idée. Avec la chaleur, répondit l'un d'entre eux, des envies d'oranges se sont faites de plus en plus pressantes...

La prof d'histoire – *Ce cylindre coupé par deux plans passant par une perpendiculaire à son axe est ce qu'on appelle parfois le « sabot » d'Archimède. Il était assez fier d'en avoir trouvé le volume et il prit ce calcul comme exemple pour faire apprécier sa méthode à Ératosthène. C'était le premier « kybismos », mesure exacte d'un volume limité en partie par une surface courbe. Mais votre approche est plus simple que la sienne qui utilise deux équilibres successifs dont l'un résulte de relations métriques fort ingénieuses. Il confirme d'ailleurs son résultat par une autre méthode fondée sur l'aire de la section de parabole qu'il avait obtenue précédemment. Finalement vous m'avez fait saisir sa pensée bien mieux que les commentaires d'Eutocius auxquels, je dois dire, je n'ai jamais rien compris.*

Le prof de maths – *Eutocius est un besogneux qui, sept siècles après Archimède, reprend ses raisonnements en alourdisant tout ce qui était conceptuel et vivant. C'est sans intérêt. La même remarque est faite par Jean Dieudonné à propos des commentaires des travaux d'Évariste Galois par ses contemporains. Ils sont compliqués et alambiqués là où le texte de Galois nous paraît simple et clair. Archimède dit lui-même comment il voulait être lu : « Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas venues à l'esprit. »*

Je dois préciser toutefois que nous n'avons entrevu aujourd'hui qu'une partie de la pensée heuristique d'Archimède qui consiste à déformer des éléments infinitésimaux en conservant les aires dans le plan ou les volumes dans l'espace, mais Archimède complète cet outil par un autre qui est de les déformer en conservant l'équilibre par rapport à un axe des parties supposées pesantes. C'est très fécond aussi bien sûr.

Un car attendait le groupe à la fin du chemin. Je m'apprêtais à prendre congé quand on me fit savoir que ce n'était pas terminé : il y avait maintenant contrôle des connaissances.

Nous quittâmes le parc des Volcans d'Auvergne et le car s'arrêta devant l'église St Austremoine d'Issoire, célèbre grande abbatale romane qui depuis *Les copains* de Jules Romain a acquis la réputation de favoriser l'imagination, mais dont l'intérieur malheureusement fut restauré au dix-neuvième siècle avec des couleurs criardes. Les élèves s'assirent dans la nef et le prof de maths leur demanda de calculer suivant les idées développées par leur camarade le volume et la surface de la voûte d'arêtes du bas-côté, car on allait en refaire les peintures.

Le prof de maths – *Je donne une indication. Commencez par considérer l'intersection mathématique de deux demi-cylindres perpendiculaires que sont les berceaux en plein cintre. Cela forme une sorte de coupole dont les sections horizontales sont des carrés et qui, si vous y prêtez attention, relève de la théorie de vos camarades. Puis calculez la somme des aires des deux demi-cylindres et retranchez-lui celle de cette coupole. De même pour les volumes.*

Pendant l'épreuve, il me fit observer que la méthode s'appliquait aussi par affinité verticale aux voûtes elliptiques telles qu'on les aimait au dix-huitième siècle, du moins pour ce qui est des volumes et qu'Archimède avait abondamment exploité cette remarque. Quant à la voûte d'arêtes du déambulatoire, intersection d'un tore avec des conoïdes, il n'y avait pas encore réfléchi, mais était optimiste...

Le prof de maths – *Pour ce qui est du tore, en tout cas, c'est chose aisée. Si vous découpez un tore en fines tranches par des plans passant par l'axe de révolution, une procédure identique à celle découverte par notre groupe d'élèves le transforme en un cylindre droit à base circulaire terminé par un plan oblique ayant même volume et même surface latérale que le tore. On peut en calculer le volume et la surface en imaginant d'en mettre deux bout à bout, les bases biseautées l'une contre l'autre. On obtient ainsi que le volume du tore est le produit de l'aire du cercle de sa section droite par la demi-somme des circonférences la plus externe et la plus interne engendrées par la rotation de cette section.*

D'ailleurs, ajouta-t-il, si l'on utilise la méthode d'Archimède dans toute sa force, avec les raisonnements d'équilibres que j'évoquais tout à l'heure, on obtient facilement les deux théorèmes de Guldin relatifs aux corps de révolution que d'ailleurs Pappus connaissait dès le quatrième siècle⁽¹⁾.

Il suffit d'abord de démontrer le lemme suivant : soit une courbe fermée du plan horizontal servant de base à un cylindre droit vertical indéfini vers le haut et vers le bas. Si l'on coupe ce cylindre par un plan passant par le centre de gravité de la base, les deux portions de cylindre découpées au dessus et au dessous du plan horizontal ont même volume. Et, de même, si l'on coupe le cylindre par un plan passant par le centre de gravité de la courbe frontière de cette base, les surfaces latérales des portions de cylindre au dessus et au dessous du plan horizontal sont égales.

⁽¹⁾ Paul Guldin (1577-1643) est traditionnellement crédité de la découverte de ces théorèmes (que nous énonçons plus bas), mais on dispose d'un texte de Pappus d'Alexandrie où est énoncé celui des théorèmes relatif aux volumes. Pappus affirme en avoir la démonstration ; celle-ci figurait peut-être dans les volumes de son œuvre qui ne nous sont pas parvenus.

En effet, prenons les volumes. Observons que, par rapport à une droite de son plan passant par le centre de gravité, la surface base supposée pesante est en équilibre. Cet équilibre est une égalité de moments pour les éléments de surface, et la valeur numérique du moment d'un élément de surface est, à un coefficient près, le volume de la portion au dessus de cet élément ou au dessous selon le cas limitée par le plan oblique.

Même raisonnement pour les surfaces latérales. Le lemme est plus simple que beaucoup de raisonnements d'Archimède. Les égalités énoncées traduisent directement des égalités entre moments sans avoir à faire de déformations.

Ensuite on considère un corps de révolution dont la section par un demi-plan méridien a une forme quelconque. Toujours par la même méthode des tranches par des plans passant par l'axe, déploiement, puis regroupement, le corps est transformé en un cylindre droit ayant pour base la section, limité à l'autre extrémité par un plan oblique et de même volume et même aire latérale que le corps initial. Si la base est horizontale et le cylindre vertical, chaque fibre verticale du cylindre a pour longueur la circonférence qui était décrite par le point où elle rencontre la base. Par application du lemme précédent, on ne change pas le volume du cylindre en le coupant horizontalement à la hauteur de la circonférence décrite par le centre de gravité de la section. On a le premier théorème de Guldin : le volume est le produit de l'aire de la section par la circonférence décrite par le centre de gravité. Et le même raisonnement donne aussi bien le second théorème : l'aire latérale est le produit de la longueur de la courbe frontière de la section par la circonférence décrite par le centre de gravité de cette courbe.

Comme je revenais sur la question de la supériorité du calcul intégral sur le calcul des indivisibles, il me fit remarquer que le calcul des indivisibles, c'est-à-dire ce que nous venons de pratiquer, était en plein essor au dix-septième siècle avec Roberval et l'aire de l'arche de cycloïde quand il fut supplanté par le calcul intégral au point d'être abandonné. Pourtant cette méthode géométrique de transformation d'éléments infinitésimaux pour prouver l'égalité de deux aires pouvait s'appliquer *a priori* même si les intégrales qui fournissent ces aires sont incalculables. Les deux méthodes n'avaient donc pas le même champ d'application.

Parmi les élèves, les discussions allaient bon train. Le prof de philo prit les références du livre de Hadamard et, comme mot de la fin, proposa une citation du philosophe Francis Bacon du tout début du dix-septième siècle : « *les hommes ne comprennent pas assez quel usage excellent les mathématiques pures peuvent avoir en ce qu'elles apportent remède et guérison à de nombreux défauts de l'esprit et des facultés intellectuelles. Car, si l'esprit est obtus, elles l'aiguisent, s'il a trop tendance à vagabonder,*

elles le fixent, s'il est trop plongé dans le sensible, elles le rendent abstrait. Ainsi, il en est des mathématiques comme du tennis, qui est un jeu en lui-même sans utilité, mais qui est fort utile en tant qu'il rend l'œil rapide et le corps prêt à se plier à toutes sortes de postures ».

Bibliographie

Archimède.

Tome I, *De la sphère et du cylindre, la mesure du cercle, sur les conoïdes et les sphéroïdes.*

Tome II, *Des spirales, de l'équilibre des figures planes, l'arénaire, la quadrature de la parabole.*

Tome III, *Des corps flottants, Stomachion, la méthode, le livre des lemmes, le problème des bœufs.*

Tome IV, *Commentaires d'Eutocius, Fragments*

Trad. Ch. Mugler, Les Belles Lettres, 1970.

Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, (vers 320 apr. J.-C.), extraits et commentaires in E. H. Warrington, *Greek mathematics*, The Loeb classical library, Harvard Univ. Press, 1968.

Francis Bacon, *Du progrès et de la promotion des savoirs (1603)*, trad. Le Dœuf, Gallimard, 1991.

J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Blanchard, 1959 (la question de la pensée sans mots est abordée dans le chapitre VI).

A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Seuil, 1986.

A. Deledicq et F. Cassiro, *Apprivoiser l'infini*, ACL-Éditions, avril 1997.