Dossier : orientations pour l'enseignement des maths

Dire et écrire des mathématiques

Nicolas Rouche et Luc Lismont(*)

1. La langue commune est indispensable

Beaucoup de gens pensent que les mathématiques s'expriment dans un langage « autonome », donc un langage qui se suffirait à lui-même, une pure combinatoire de symboles[1]. En somme, les mathématiques se réduiraient à des calculs. Montrons que cette conception n'est pas tenable.

Si on vous montre des chiffres et des barres arrangés comme ceci, qu'en pensez-vous ?

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 2 & 7 \\ & & 4 & 3 \\ \hline & 6 & 8 & 1 \\ 9 & 0 & 8 & \\ \hline 9 & 7 & 6 & 1 \end{array}$$

Première possibilité : vous n'avez pas encore appris – ou vous avez oublié – ce que ces symboles veulent dire. Alors il faudra qu'on vous explique ce que sont les petits dessins qu'on appelle *chiffres*, et pourquoi on les a disposés

(*) Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 5 rue Émile Vandervelde, B-1400 Nivelles

(1) Nous prenons ici symbole au sens habituel en mathématiques : signe arbitraire, sans lien de sens ou d'analogie avec ce qu'il représente. C'est l'acception II 2° de ROBERT [1964].

ainsi de même que les deux barres, et personne n'a jamais réussi à expliquer cela sans parler la langue commune. Deuxième possibilité : vous reconnaissez qu'il s'agit d'une multiplication, opération familière, mais alors elle n'a pour vous aucun intérêt si on ne vous explique pas pourquoi on a fait ce calcul, dans quel contexte il a un sens. Et qui serait capable d'expliquer cela sans recourir à la langue commune, en n'utilisant que des symboles puisés dans le stock des mathématiques ?

La même analyse peut être reproduite à tous les étages des mathématiques. Par exemple, que peusez- vous de la formule que voici ?

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Vous ne connaissez pas ? Alors on vous l'expliquera dans la langue commune. Vous connaissez ? Alors il faudra bien qu'on vous dise – dans la langue commune – pourquoi on l'a écrite et quel problème on cherche à résoudre. Il n'y a pas d'autre solution : pour transmettre le sens, il faut parler comme tout le monde, quitte à entremêler son langage de symboles déjà connus(2).

On pourrait croire que plus on est spécialisé en mathématiques, et plus on peut se passer de la langue commune. Tel n'est absolument pas le cas. Celle-ci est indispensable à la communication mathématique même la plus avancée. L'observation suivante en témoigne clairement : parmi la multitude des revues qui de par le monde exposent les résultats de la recherche mathématique(3), il n'en est pas une qui accepterait des articles écrits autrement que dans la langue commune, bien entendu entrecoupée d'expressions symboliques.

2. Le rôle premier des symboles

Essayons maintenant de préciser le rôle des symboles et du calcul dans la pensée mathématique. Et pour cela, imaginons d'abord que nous devions exécuter la multiplicatiou évoquée ci-dessus en utilisant seulement les noms de nombres écrits dans la langue commune. Nous nous empêtrerions dans les reports et la mémoire des résultats intermédiaires. Imaginons de uême que nous devions énoncer et prouver, sans notations algébriques, la formule du

(2) Pour plus de clarté, nous n'avons envisagé que deux possibilités extrêmes : celle où la formule citée est totalement iucounue, et celle où elle est familière. Une position intermédiaire est celle de l'élève qui vient de l'apprendre et pour qui elle préseute encore un intérêt par elle-même. Cela peut amuser beaucoup un écolier de faire de grandes multiplications.

(3) Pour prévenir un malentendu assez fréquent, signalons que les mathématiques ne sont pas une science finie. Le volume des résultats de recherche publiés chaque année n'a jamais été aussi grand.

cube d'un binôme. Il nous faudrait un effort d'attention démesuré. Gerolamo Cardano, algébriste italien du XVI^{e} siècle, avait besoin de presqu'une page pour expliquer cela.

Dans la plupart des domaines mathématiques, un système de symboles muni de ses règles combinatoires et quelques formules montrent, de façon souvent extraordinairement claire et sobre, la structure même et le fonctionnement de la théorie. Pour celui qui a le temps de s'y habituer, celle-ci devient hyperfamilière et les opérations qu'elle implique passent à l'état d'automatismes. À ce stade, la théorie est véritablement assimilée, passée à l'état de seconde nature.

Mais quel est l'intérêt d'installer des automatismes dans la pensée ? C'est que l'esprit humain est incapable d'embrasser beaucoup de choses à la fois, à un même instant, dans sa conscience claire. C'est pourquoi. pour progresser en mathématiques, il faut amener de plus en plus de notions et de propriétés à cet état de choses hyperfamilières évoqué ci-dessus, il faut les représenter par quelques signes clairs et que l'on peut à moitié oublier pour penser à ce qui se trouve plus loin et est plus difficile. Dans cette perspective, les calculs sont des combinaisons automatiques, c'est-à-dire qui s'exécutent sans retour aux sources et donc mobilisent peu l'attention. Ils démultiplient la puissance de penser.

3. Le sens large des mots

Idéalement, chaque mot de la langue commune serait cerné par une seule définition. Il est vrai toutefois que les dictionnaires en donnent souvent plusieurs. Mais, quand c'est le cas, on doit s'arranger, en parlant ou en écrivant, pour que le contexte lève l'ambiguïté. C'est une qualité indispensable des mots que de renvoyer à des classes d'objets clairement identifiables[4]. Par exemple, lorsque je pense *carré*, j'évoque une figure polygonale avec deux propriétés de base, à savoir quatre côtés égaux et quatre angles droits. Un carré, c'est cela, rien de plus et rien de moins.

Mais attardons-nous un moment à cet exemple du *carré*. Ce terme m'évoque bien plus que ce que comprend sa définition. Il draine du fond de ma mémoire vers mon subconscient[5] d'autres propriétés plus ou moins

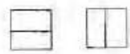
[4] Le lecteur qui a étudié les « maths modernes » se souviendra de ce qu'un concept peut être saisi par une définition, c'est-à-dire par des propriétés qui le caractérisent (saisi en compréhension) ou encore, quand c'est possible, par l'ensemble des objets auxquels la définition renvoie (saisi en extension).

[5] « *Subconscient* : qui n'est pas saisi par la conscience, parce que l'orientation actuelle de celle-ci l'exclut, mais qui est apte à devenir conscient aussitôt que l'attention s'y portera, ou du moins après un moment d'effort pour le saisir. » (A. LALANDE [1951])

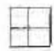
nombreuses selon mon expérience. Par exemple :

- les guéridons de café ont souvent un plateau carré ;
- les échiquiers sont carrés et sont couverts de carrés jointifs ;
- je connais des clochers de section carrée ;
- je sais faire un carré en pliant une feuille de papier ;
- lorsque je dispose deux côtés d'un carré verticalement, ses deux autres côtés sont horizontaux ;
- si je le tourne d'un huitième de tour, il est dans la position où on présente le plus souvent les losanges ;

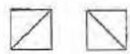
- chacune de ses médianes le divise en deux rectangles superposables ;



- ses deux médianes le divisent en quatre carrés ;



- chacune de ses diagonales le divise en deux triangles isocèles superposables ,



- ses deux diagonales le divisent en quatre triangles superposables ;

- il est un membre particulier de la famille des quadrilatères qui ont deux côtés parallèles (on le voit en donnant des coups de ciseaux rectilignes dans une bande de papier) ;

- il est le deuxième membre de la famille des polygones réguliers ;

- il est inscriptible dans un cercle.

Si j'ai acquis l'essentiel de ce que je sais sur le carré dans un enseignement théorique et sans contexte, l'ensemble d'objets et de phénomènes rassemblés dans mon esprit y forme nn tableau pauvre et figé. Au contraire, si j'ai approfondi ma connaissance du carré dans des contextes problématiques, des liens se sont tissés entre toutes ces choses et ma pensée s'anime, circule entre elles au gré d'associations significatives, perçoit ou conjecture des enchaînements variés.

Ainsi le mot *carré* possède un *sens étroit*, celui de sa définition. Mais il possède aussi un *sens large*, beaucoup plus riche, moins bien cerné, variable d'une personne à l'autre selon son expérience et l'enseignement qu'elle a reçu, et c'est ce sens large qui sert la pensée créative, nécessaire pour résoudre les problèmes. Le sens étroit sert d'abord à surveiller, à contrôler l'imagination, et ensuite à formuler les solutions et les preuves(6).

Le mot carré n'était ici qu'un exemple. Plus généralement les mots, qu'ils appartiennent à la langue commune ou au vocabulaire mathématique, ont un ou plusieurs sens étroits (ceux que les dictionnaires s'efforcent de donner), mais aussi un sens large fait de la foule des choses, des qualités, des relations qui adhèrent à eux dans la mémoire.

La clarté de la pensée a deux sources nécessaires : le sens large et intuitif des mots qui fait qu'on voit des choses, qu'on les attend et le sens étroit qui fait qu'on les voit juste, dans leurs relations vraies. Il n'y a guère de pensée réduite au sens étroit. Malheureusement, il y a des enseignements mathématiques réduits au sens étroit.

4 Le sens large des symboles

Les symboles et les formules mathématiques ressemblent aux mots. Ils ont d'abord – cela va de soi – un sens étroit, celui de leur définition. Mais pour toute personne qui pratique les mathématiques, c'est-à-dire qui étudie des théories et peut-être les explique à d'autres, qui résout des problèmes et fait des calculs, ils ont aussi un sens large, un pouvoir d'évocation. L'ensemble des choses et des phénomènes auxquels ils renvoient peut être vaste et traversé de liens multiples. Il est vrai par ailleurs que le sens large des symboles et des formules appartient davantage aux mathématiques elles-mêmes qu'aux contextes de la vie quotidienne(7). Il a pour le mathématicien le même effet que le sens large des mots : il mobilise et soutient sa pensée créative.

Mais en va-t-il de même pour les élèves ? Oui jusqu'à un certain point, pour ceux qui ont l'occasion de manier les symboles et les formules dans des contextes significatifs, c'est-à-dire pour résoudre des problèmes et satisfaire leur curiosité. La difficulté est que les élèves doivent s'occuper de toutes les matières à tour de rôle, dans des tranches horaires définies étroitement, et que souvent, parce qu'ils n'ont pas le temps de faire assez de mathématiques, ils n'atteignent pas au plein sens des théories. Peut-être veut-on leur enseigner trop de choses dans le temps imparti, ce qui ne leur laisse le loisir de se familiariser avec aucune.

Si par ailleurs l'enseignement est centré sur une théorie sans contexte ni questions, les symboles, tout comme les termes mathématiques les plus

---

(6) Pour une présentation plus complète des notions de sens étroit et de sens large, voir N. ROUCHE [1991].

(7) Toutefois quelques signes tels que + ou = ont des significations tellement universelles qu'ils sont aussi compris et utilisés dans le quotidien.

techniques, demeurent enfermés dans leur sens étroit. Celui-ci confine pour eux à l'absence de sens. Il ne mobilise pas l'esprit, il ne provoque pas l'animation, le bonheur de la pensée en recherche.

Si enfin l'enseignement est centré sur des exécutions de routines, c'est souvent le sens étroit lui-même qui échappe, provoquant les débâcles que l'on connaît.

Cette analyse est à coup sûr schématique. Pourtant, elle n'est pas sans lien avec la réalité.

5. L'écrit, matériau de l'examen critique

Jusqu'à présent nous avons examiné la fonction des mots et celle des symboles dans la pensée mathématique, mais nous ne nous sommes pas encore interrogés sur les rôles respectifs de l'oral et de l'écrit. Venons-en donc à cet aspect du langage.

Et tout d'abord, pourquoi ne se contenterait-on pas de communiquer oralement ? Car par le discours, on transmet facilement beaucoup de choses. Les discussions en particulier jouent un rôle important. Elles permettent la spontanéité, les rapides changements de cap. Elles amènent à constater les malentendus et réduisent efficacement les plus superficiels d'entre eux par des échanges rapides de questions et réponses. Elles obligent les interlocuteurs à s'accorder sur un vocabulaire commun, premier pas vers une objectivation du savoir. Les discussions s'appuient souvent sur des expressions graphiques sommaires, parfois peu intelligibles hors du cercle des interlocuteurs, mais qui vont à l'essentiel. Pourquoi la parole, soutenue par des schémas vite esquissés, ne suffit-elle donc pas en mathématiques ?

C'est qu'un vrai débat scientifique déborde le cadre des leçons et des conversations. La science, avec ses subtilités, a besoin d'une expression précise, soigneusement étudiée et stable. D'abord pour être apprise, mais en tout cas pas pour être transmise comme une vérité définitive. Surtout pour être disponible, en tant qu'un état du savoir, comme base de discussion critique(8). Les écrits sont les instruments de base de la science en élaboration.

Cette observation est vraie de la science telle qu'elle se construit et

(8) Les premières grandes confrontations scientifiques connues dans l'histoire – elles portaient sur la nature des choses, c'est-à- dire sur la constitution de la matière et de l'univers – sont celles des « physicistes » ioniens (Anaximandre. Anaximène et quelques autres, à partir du VIe siècle avant J.-C.). Ce n'est pas un hasard, comme le souligne Jean-Pierre Vernant [1995] si elles furent contemporaines de l'apparition de la prose écrite. Auparavant le savoir, plus traditionnel, moins critique, mêlé aux mythes, se transmettait dans des poèmes comme ceux d'Hésiode.

reconstruit sans cesse au cours de siècles. Mais elle est vraie aussi de la science telle qu'elle se construit et reconstruit sans cesse dans les écoles, au fil des années pour chaque élève. Car on sait maintenant[9] qu'on ne peut enseigner dès le plus jeune âge des concepts définitifs, qu'il faut au contraire partir du savoir des enfants pour le mettre en question et le travailler dans sa masse, en acceptant des mutations, des réorganisations[10]. Or comment fonder un savoir nouveau sur un savoir ancien si celui-ci n'a que la faible consistance de souvenirs plus ou moins estompés ? Pour justifier le savoir nouveau, il faut pouvoir critiquer le savoir antérieur jusque dans son expression détaillée. Comment faire si celui-ci n'est pas disponible sous forme d'un écrit ? À cet égard, la pratique des manuels scolaires découpés en tranches d'une année et qu'on revend à la rentrée est un obstacle à l'apprentissage et à l'enseignement[11]. La pensée en développement a besoin de points d'appui fermes.

6. Écrire pour penser soi-même

S'il est vrai, comme nous venons de le voir, que les écrits sont les référents du débat scientifique, il nous reste à montrer qu'ils sont aussi les instruments indispensables de la pensée individuelle en recherche.

On pense certes d'abord sans écrire de phrases, en tâtonnant mentalement, en griffonnant des formules ou des schémas. On voit – et souvent on croit voir – des échappées, des solutions. Mais cette forme de réflexion spontanée a quelque chose de sommaire, d'inachevé. C'est lorsqu'on se met à rédiger qu'on réalise la complexité des questions, qu'on perçoit les lacunes, les illusions. La pensée s'en trouve relancée. En quelque sorte on discute avec soi-même. Il y a celui qui croit voir toutes sortes de choses et celui qui exige des comptes, celui qui navigue dans le sens large et celui qui veut le saisir dans les modalités plus sûres du sens étroit. Ainsi l'écrit n'est pas seulement un instrument qui affermit et clarifie les débats scientifiques entre personnes, il contribue aussi à la formation de la pensée individuelle.

Qu'est-ce qui donne à l'écrit ce pouvoir de guider fermement la pensée, qui en fait un instrument de la rigueur ? Il faut pour le comprendre revenir à l'incapacité de la conscience d'évoquer beaucoup de choses en un même instant. Nous ne pouvons pas rassembler en une seule image mentale tout ce qu'une page d'écriture met à la portée d'un regard rapide. On doit pouvoir,

[9] C'est une des conclusions que l'on peut tirer de l'expérience des mathématiques modernes, dont les promoteurs avaient tout fait pour inculquer aux élèves des concepts définitifs, ou à tout le moins qu'il faudrait revoir le moins possible.

[10] Les travaux de Piaget et de Vygotski ne laissent pas de doute sur ce point.

[11] Cette observation était déjà présente dans le rapport « Danbion ».

d'un coup d'œil, en une fraction de seconde, vérifier qu'il y bien là *rectangle* et pas *isocèle*, *naturel* et pas *rationnel*, *si* et non *si et seulement si*, que *pour tout* est bien avant *il existe* et non après, etc. On doit pouvoir passer et repasser sur les articulations cruciales du texte pour s'en créer une image mentale intégrée. L'écrit est un instrument de la concentration d'esprit. Il aide à comprendre et vérifier, parce qu'il aide à rassembler les données.

On pourrait penser que ces considérations ne concernent que les mathématiciens. Mais il n'eu est rien. Car même un élève assez jeune doit pouvoir intégrer dans sa pensée du moment une et souvent plusieurs définitions, un énoncé avec sa structure logique détaillée, parfois une preuve brève. L'écrit est un soutien matériel irremplaçable de la pensée.

Aussi ne devrait-on pas – en principe – se demander s'il est opportun d'écrire dans les cours de mathématiques. Car pour apprendre les mathématiques, il faut en faire, et pour en faire, on ne peut pas ne pas écrire.

7. Deux témoignages

Depuis une quinzaine d'années, beaucoup de professeurs de par le monde ont pris conscience de ce qu'ils pouvaient améliorer considérablement le rendement de leur enseiguement, simplement en exigeant de leurs élèves uu bon niveau d'expression écrite.

Voici à cet égard un premier témoignage, veuant d'un mathématicien connu, très attentif aux problèmes d'enseignement. Serge Lang, de Yale University aux États-Unis, écrit : « Il me paraît essentiel de demander aux étudiants d'écrire leurs travaux de mathématiques en phrases complètes et cohérentes. Une grande partie de leurs difficultés en mathématiques proviennent de ce qu'ils " balancent " des symboles et des formules isolés, non incorporées à des phrases sensées et non munis des quantificateurs appropriés. [...] lusister sur une qualité d'expression raisonnable aurait pour effet une amélioration spectaculaire des performances mathématiques. » (Voir S. Lang [1979].)

Un autre professeur, Melvin Henriksen [1992], a tout simplement décidé de ne plus corriger les copies qui ne seraient pas rédigées « en phrases ». Décision difficile à tenir, dit-il, tant les étudiants n'en voient pas au départ l'intérêt. Mais décision qui, tenue pendant quelques mois, a des effets considérables sur leur qualité de pensée. Henriksen ajoute qu'après deux ans de cette pratique, il demande aux étudiants d'écrire dorénavant « eu paragraphes », soulignant ainsi l'intérêt d'organiser globalement chaque exposé par des divisions qui le clarifient.

N.B. *Il est sans doute utile de préciser, au terme de cet article, que « dire et écrire » est une modalité du travail mathématique dans toutes ses phases et qu'il serait donc inapproprié de faire du dire ou de l'écrire des points particuliers, traités à part dans l'enseignement.*

Un amical merci à Thérèse Gilbert pour ses intéressantes remarques sur une première version de cet article.

Bibliographie

PAUL DANBLON, coord., *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté française de Belgique*, Ministère de l'Édncation Nationale, Bruxelles, 1990 ; ce rapport a été republié *in extenso* dans Repères, numéro 6, 1992, p. 111-131.

MELVIN HENRIKSEN, You can and should get your students to write in sentences, in *Using writing to teach mathematics*, coord. A. STERRETT, The Mathematical Association of America, Washington DC, 1992.

ANDRÉ LALANDE, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Presses Universitaires de France, Paris, 1951.

SERGE LANG, *A first course in calculus*, Addison-Wesley, Reading, Massachusets, 1979.

PAUL ROBERT, *Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*, Société du Nouveau Littré, Paris, 1964.

NICOLAS ROUCHE, Pourquoi les maths ? in R. BKOUCHE *et al.*, *Faire des mathématiques, le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris, 1991.

JEAN-PIERRE VERNANT, *Les origines de la pensée grecque*, Presses Universitaires de France, Paris, 6^e éd., 1995.