Dans nos classes : Collège

Un tableur - grapheur pour optimiser le volume d'un cône

Éric Roditi

Les nouveaux programmes du Collège des classes de 4^{e} et de 3^{e} ainsi que les ambitions annoncées par le ministère pour le futur Lycée insistent sur la nécessité de formation des élèves à l'utilisation des nouveaux outils d'écriture, de calcul et de dessin : traitement de textes, tableur-grapheur, calculateur formel et logiciel de dessin géométrique.

Cet article décrit une séquence pédagogique où les apports d'un tableur-grapheur semblent avoir permis un travail et un apprentissage mathématique. Elle a été réalisée en deux séances d'une heure dans une classe de troisième « standard » d'un collège intégré à un Réseau d'Éducation Prioritaire. La présentation de la première heure sera brève et la deuxième sera détaillée. L'objectif annoncé aux élèves était de répondre à un problème d'optimisation posé par la fabrication d'un cône de révolution. L'outil algébrique n'étant pas suffisant, les élèves ont dû recourir à un graphique pour tenter de résoudre ce problème.

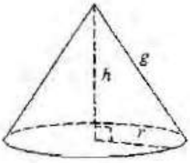
L'objectif pédagogique était multiple : réinvestir les connaissances acquises sur le cône de révolution, montrer l'utilisation qu'on peut faire d'un graphique pour résoudre un problème, faire douter les élèves de la « confiance » qu'on peut accorder à un graphique pour justifier le besoin d'une étude théorique[1], étude qui sera menée au Lycée. C'est à ce niveau

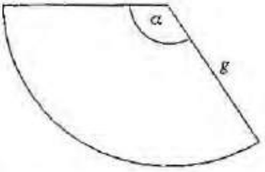
[1] En géométrie, la question de la « confiance » qu'on peut accorder à *une figure* est souvent d'actualité. Cette questiou soulève une réflexion mathématique à deux

que l'utilisation d'un tableur-grapheur s'est avérée efficace.

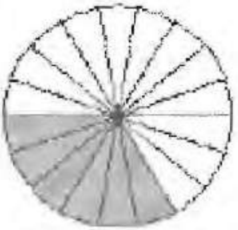
Précisons dès à présent que, à défaut d'équipement suffisant, ce sont seulement les résultats obtenus grâce à un tableur-grapheur qui ont été utilisés dans la séquence : ils ont été montrés aux élèves par rétro-projection de transparents où figuraient des copies d'écrans.

Première séance





L'étude du cône de révolution a mis en évidence les trois variables suivantes : le rayon r de la base, la hauteur h du cône et la longueur g de la génératrice. La première heure de la séquence a porté sur la fabrication de la surface latérale d'un cône de révolution. Elle a introduit une nouvelle variable : l'angle α du secteur de disque dont le rayon est la génératrice du cône. Les élèves savaient déjà que r, h et g sont reliés par la propriété de Pythagore ($g^2 = r^2 + h^2$) et que le volume V du cône s'écrit $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{\pi}{3}r^2h$ où B désigne l'aire de la base du cône.



Après une étude de la surface latérale du cône (tout point du cercle de base est à la même distance g du sommet du cône), nous avons proposé aux élèves deux disques sur une feuille de papier blanc où figuraient 18 rayons formant un angle de 20°. Chaque élève a découpé et conservé deux secteurs de disque identiques, par exemple le secteur non-grisé de la figure. Avec le premier secteur, il a fabriqué la surface latérale d'un cône. Le second secteur, restant à l'état de patron, a servi à des manipulatious montrant que la longueur ℓ de l'arc du secteur est égale au périmètre de la base du cône : $\ell = 2\pi r$.

Les rayons du disque ont permis de faciliter la mise en évidence de la proportionnalité entre l'angle α du secteur et la longueur ℓ de l'arc. Les différents cônes réalisés par les élèves avaient en commun que l'angle du secteur circulaire était un multiple de 20°, ce qui a induit la relation de

niveaux : en introduction des outils nouveaux et cu application de ces nouveaux outils pour répondre aux questions qu'ils pennettent de traiter.

proportionnalité. Les égalités $\frac{\alpha}{360} = \frac{\ell}{2\pi g}$ et, avec $\ell = 2\pi r$, $\frac{\alpha}{360} = \frac{r}{g}$ ont été établies.

Au cours de cette construction, les élèves ont travaillé avec des valeurs de α différentes. Malgré la valeur constante de la génératrice, la variation de l'angle α entraîne une variation de la hauteur, du rayon de la base et donc du volume. La précision de l'analyse a progressé. Plus la valeur de α est petite, plus le rayon r est petit et plus la hauteur h est grande. Quand α croît de 0 à 360°, r croît de 0 à g et h décroît de g à 0.

Un problème d'optimisation s'est posé. Le volume du cône, lui aussi, varie avec α. Mais pour quelle valeur de l'angle α ce volume est-il maximum ? Nous ramassons les cônes, ce problème sera étudié plus tard.

Deuxième séance

Analyse heuristique du problème

Les cônes sont ressortis, rassemblés et exposés. Les volumes sont comparés. Nous aurions pu apporter du sucre en poudre, mais nous nous sommes contentés d'une comparaison visuelle... Le fait qu'on ne puisse rien prouver par l'expérience a eu quelques avantages ; les élèves ont beaucoup discuté pour établir des lois de variations conjointes de l'angle α et du volume V.

Finalement, les élèves sont arrivés, avec bien sûr une formulation très approximative, au constat suivant : si α croît de 0 à 360 degrés, alors V croît de 0 à une valeur maximum, puis décroît jusqu'à 0.

Pour quelle valeur de l'angle α ce volume est-il maximum ? Première conjecture : c'est sans doute pour $\alpha = 180°$; les élèves observent les cônes, ils ne sont sûrs de rien, il faut en savoir plus.

Modélisation de la situation : passage à l'algèbre

Calcul du volume à partir de la valeur de l'angle α. Les élèves ne connaissent pas la valeur de g qui a été fournie pour construire les cônes. Nous leur faisons remarquer que cela n'est pas grave, l'étude des agrandissements et réductions montre que la valeur de l'angle indique la « forme » du cône, donc la valeur pour laquelle le volume est maximal ne dépend pas de la génératrice. Nous proposons alors à la classe de se fixer une valeur pour g : nous choisissons g = 360mm qui leur facilitera les calculs. Avec g = 360mm, ils obtiennent $r = \alpha$. Cette égalité porte sur les valeurs et non sur les grandeurs ; afin d'éviter toute confusion, nous demandons aux élèves de fonrnir un exemple : si $\alpha = 120°$, alors $r = 120$ mm.

- Les élèves expriment alors h en fonction de α : $g^2 = r^2 + h^2$ devient $h = \sqrt{360^2 - \alpha^2}$.

- Puis ils expriment V : $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ devient $V = \frac{\pi}{3} \alpha^2 \sqrt{360^2 - \alpha^2}$.

Nous proposons de vérifier, par le calcul, les affirmations précédentes : si $\alpha = 0$ et si $\alpha = 360$ on retrouve bien $V = 0$.

Comment savoir pour quelle valeur de α on obtiendra le volume maximum ? La récente interprétation graphique des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues a sans doute influencé les élèves : ils proposent de dresser un tableau de valeurs et de dessiner un graphique. Et $\frac{\pi}{3}$? Nous proposons aux élèves de le négliger : $\frac{\pi}{3} = 1$ et, de toute façon, ce qui varie dans V n'est pas $\frac{\pi}{3}$, mais seulement $\alpha^2 \sqrt{360^2 - \alpha^2}$. Nous notons $v(\alpha) = \alpha^2 \sqrt{360^2 - \alpha^2}$ et nous leur demandons de dresser le tableau.

Élaboration d'un tableau de valeurs : de l'algèbre à la fonction

Écriture de la ligne de frappe. Nos élèves sont certainement les derniers à ne pas profiter dès le collège de calculatrices qui respectent la syntaxe algébrique. Pour un angle de 120°, il faut taper :

120	x^2	×	(	360	x^2	−	120	x^2	)	$\sqrt{\ }$	=	⟶	4 887 552.072

Étape « douloureuse » simplement signalée dans cet article car elle est sans rapport avec son objet : que représentent ces 4,9 millions ? 4,9 millions de mm^3, c'est 4,9 dm^3 ou encore 4,9 l.

Les élèves partent de zéro et dressent un tableau de valeurs. Non, c'est trop lourd ! Après trois ou quatre valeurs calculées, nous limitons cette étape répétitive et nous donnons aux élèves le tableau qu'ils obtiendraient.

α en °	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360
v en l	0	0,1	0,6	1,3	2,2	3,5	4,9	6,5	8,3	10,1	12,0	13,8	15,5	16,8	17,7	17,9	16,9	13,7	0

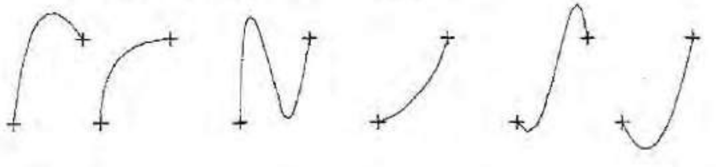
Nous regrettons presque, à cette étape, de ne pouvoir inscrire une troisième ligne avec la forme du cône qui varie en fonction de α... Les élèves mobilisent un mode de pensée fonctionnel : α et v ne sont plus les écritures littérales avec lesquelles ils calculaient précédemment. Ces écritures sont des variables : v dépend de α, la valeur de v varie quand celle de α varie et la loi qui les relie n'est plus une formule, c'est un procédé (laborieux) pour déterminer la valeur de v à partir de celle de α.

« Mais c'était faux d'affirmer que 180° donnerait le plus grand volume ! ». Nous confirmons avec bienveillance : comme il est faux d'affirmer qu'un point d'un segment est son milieu sans complément d'enquête… Maintenant, graphique !

De la fonction au graphique, comment relier les points ?

Distribution d'une feuille de papier millimétré. Axe des abscisses : 1cm représente 20°. Axe des ordonnées : 1cm représente 1dm^3. À vos crayons, marquez les points ! Question classique : « Peut-on relier les points ? ». Réponse standard : « il faut voir… Est-ce que cela a un sens ? Si cela a un sens, comment doit-on les relier ? ». La question avait déjà été posée à l'occasion de deux devoirs à la maison où des graphiques ont été tracés et lors de l'interprétation graphique des systèmes de deux équations à deux inconnues. Le théorème de Thalès avait permis de conclure pour les équations du type $ax + by = c$ avec $b \neq 0$ qui s'écrivent $y = mx + p$. Mais v ne s'obtient pas en ajoutant un nombre p au produit de l'angle α par un nombre m ! Retour au doute…

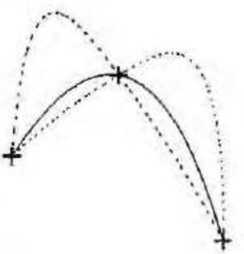
Notre proposition d'enseignant : « prenez par exemple les points de coordonnées (120 ; 4,9) et (140 ; 6,5) ; je vous repose la question : cela a-t-il un sens de les relier et si oui comment ? ». Les discussions et interventions nombreuses font apparaître la coexistence de deux conceptions qui s'opposent : « à toute valeur de α comprise entre 120 et 140 correspond une valeur de v ; donc, si on avait pris plus de points, on aurait une meilleure information » et « on ne peut pas savoir car les points n'ont pas de largeur ; donc, même en en prenant plns, ils ne se toucheront jamais ». À ce niveau, nous constatons que beaucoup d'élèves ne doutent pas qu'il soit possible, sur cet exemple au moins, de relier les points. Nous n'avons pas jugé utile à ce niveau de renforcer le doute ; nous nous sommes contenté de légitimer ce doute et nous avons choisi d'approfondir la réflexion sur la manière de relier les points. Nous demandons donc aux élèves d'admettre qu'on puisse relier les deux points. Mais alors il y a différentes façons de le faire sans tracer de segment ; voici des exemples qui ont été proposés.



Le point de vue des élèves : il faudrait quand même qu'on puisse savoir si, quand on passe d'un point à un autre en montant (idée du vecteur de la translation), on peut ou non relier les points par une courbe en montant ! Réponse du professeur de troisième : vous le verrez dans le détail quand la courbe est droite, mais pour les « vraies » courbes, il faudra patienter jusqu'au Lycée. En attendant, vous pouvez relier les points par des segments ou « arrondir les angles » si vous préférez.

Un problème se pose à nous : il ne faudrait pas que les élèves se persuadent trop vite qu'on peut relier les points en se laissant guider par la variation apparente de la courbe, sinon le maximum sera obligatoirement atteint pour $\alpha = 300°$. Trop tard ! Pratiquement tous les élèves de la classe ont tracé un graphique où le point de coordonnées (300 ; 17,9) est le maximum. La conclusion s'impose d'elle-même : la réponse à la question posée au début de l'heure est enfin trouvée.

L'apport du tableur-grapheur : vivement l'analyse !



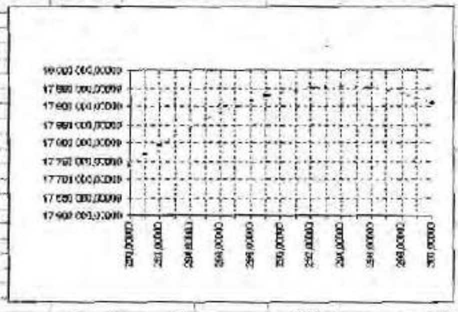
Retour au doute. Comment les points d'abscisses 280, 300 et 320 ont-ils été reliés ? Êtes-vous certains ou non que le maximum est 300 ? Vous pouviez relier les points de différentes façons. Aidé par quelques élèves, nous proposons trois façons différentes de relier ces trois points : ou le maximum est le point d'abscisse 300, ou c'est un point dont l'abscisse est comprise entre 280 et 300, ou encore c'est un point dont l'abscisse est comprise entre 300 et 320.

Pour répondre à la question, il faudrait calculer des valeurs intermédiaires. C'est ici que le tableur-grapheur est un outil intéressant. Compte tenu de l'importance du travail déjà fait, il était trop coûteux de demander aux élèves de recalculer des valeurs, de reconsidérer leur graphique. Avec le tableur-grapheur, on interroge la machine facilement, elle répond immédiatement. Elle calcule les valeurs, les dispose en tableau, marque les points et les relie... par des segments. On sait qu'elle triche : la réflexion mathématique est donc permise.

Que se passe-t-il entre 280 et 320 ? Nous avons gradué l'axe des abscisses avec une unité de 1°. Lumière ! Notre collège n'étant pas encore équipé de matériel informatique permettant un travail de type « tableau noir électronique », nous nous contentons de rétroprojection de transparents. Voici le résultat obtenu :

graduation : 1

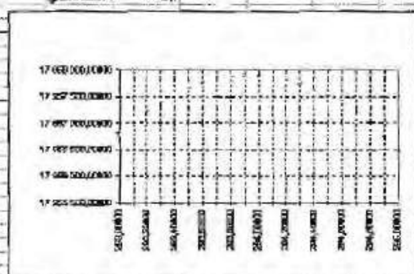
a	v(a)
280,00000	17 739 864,53541
281,00000	17 769 881,94453
282,00000	17 796 516,25400
283,00000	17 820 357,36206
284,00000	17 843 761,30332
285,00000	17 864 944,34706
286,00000	17 883 980,39652
287,00000	17 901 002,93694
288,00000	17 915 908,00000
289,00000	17 929 534,27938
290,00000	17 938 143,06636
291,00000	17 947 379,22199
292,00000	17 953 266,32098
293,00000	17 956 811,87157
294,00000	17 957 968,09604
295,00000	17 955 406,37286
296,00000	17 962 518,39196
297,00000	17 943 925,40228
298,00000	17 935 849,41075
299,00000	17 924 821,31641
300,00000	17 909 775,36792



Ainsi, le volume ma ximum n'est pas atteint pour $\alpha = 300°$. Suivant les élèves, il le serait soit pour $\alpha = 294°$, soit pour une valeur de α comprise entre 293 et 295. Débat analogue au précédent : pas de certitude pour $\alpha = 294°$ mais pour $293 < \alpha < 295$. Vous voulez zoomer la courbe sur cet intervalle ? Voici le résultat :

graduation : 0,1

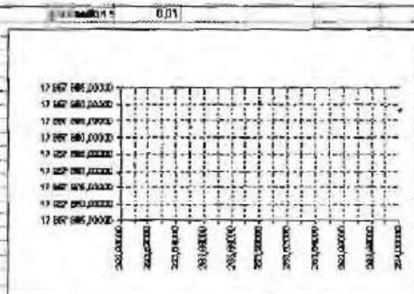
a	v(a)
293,00000	17 956 811,87157
293,10000	17 957 101,21[illegible]
293,20000	17 957 [illegible] 11274
293,30000	17 957 [illegible]
293,40000	17 957 642,[illegible]
293,50000	17 957 693,921[illegible]
293,60000	17 957 790,03951
293,70000	17 957 831,9[illegible]
293,80000	17 957 878,764[illegible]
293,90000	17 957 900,[illegible]
294,00000	17 957 899,[illegible]
294,10000	17 957 970,3[illegible]
294,20000	17 957 917,4[illegible]
294,30000	17 957 739,676[illegible]
294,40000	17 957 636,50[illegible]
294,50000	17 957 506,2[illegible]
294,60000	17 957 354,641[illegible]
294,70000	17 957 175,7[illegible]
294,80000	17 956 971,4[illegible]
294,90000	17 956 741,[illegible]
295,00000	17 956 485,37[illegible]



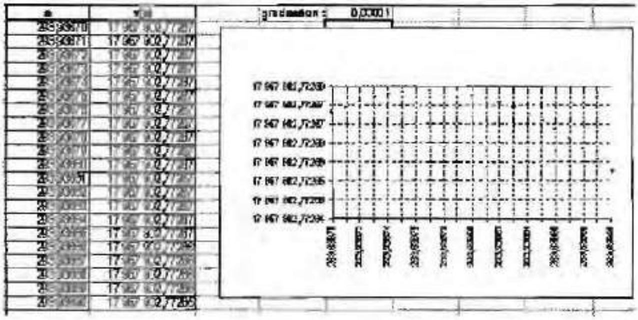
Plus de précision ? À votre service, mais précisez l'intervalle sur lequel zoomer... La juxtaposition du tableau et du graphique permet aux élèves de se repérer sur les deux supports : entre 293,8 et 294, s'il vous plaît...

graduation : 0,01

a	v(a)
[illegible]	17 [illegible]
[illegible]	17 967 [illegible] 11690
[illegible]	17 967 [illegible]
293,[illegible]	17 967 [illegible]
293,[illegible]	17 967 [illegible]
293,[illegible]	17 [illegible]
293,[illegible]	17 [illegible]
293,[illegible]	17 [illegible]
293,[illegible]	17 [illegible] 42772
293,[illegible]	17 [illegible]
293,91[illegible]	17 [illegible]
293,[illegible]	17 [illegible] 10095
293,[illegible]	17 [illegible]
[illegible]	17 [illegible]
293,[illegible]	17 [illegible]
293,[illegible]	17 [illegible]
293,[illegible]	17 [illegible]
293,[illegible]	17 [illegible]
293,[illegible]	17 967 [illegible]
293,[illegible]	17 967 [illegible]
294,[illegible]	17 967 [illegible]



Alors il sera possible de continuer comme cela jusqu'à quand ? Voyez...



Il a été possible d'encadrer la valeur de α entre 293,9387 et 293,9389, mais les limites de la machine sont atteintes : les valeurs affichées de $v(\alpha)$ sont égales pour des valeurs différentes de α. Le graphique laisse penser que le volume varie bien en atteignant un maximum pour une certaine valeur de l'angle α. Cette valeur a été encadrée avec de plus en plus de précision, mais les limites de la machine ont été atteintes (en réalité c'est une option du logiciel, mais qui, bien sûr, a ses limites) : il ne sera pas possible d'obtenir la valeur exacte...

Vivement l'analyse ! Il faut des outils pour déterminer les variations d'une fonction, et des outils pour localiser le maximum quand il a été prouvé qu'il en existe un !

Conclusion

Cette activité, analogue aux problèmes bien connus d'optimisation de volume de boites, a eu pour origine, dans l'histoire de la classe, la manipulation du patron de la surface latérale d'un cône de révolution.

La représentation d'une fonction qui n'est pas affine est incontournable en classe de troisième : les élèves généralisent trop facilement la propriété de la représentation graphique des fonctions affines à toutes les fonctions... Choisir une fonction issue d'un problème nous semble indispensable pour que les élèves s'interrogent sur sa représentation graphique. Sans ce questionnement, les points de la courbe sont reliés sans aucune réflexion mathématique.

Mais trop de questionnement et d'incertitude découragent souvent nos élèves. Le tableur-grapheur a permis de soulager leur tâche : avec une machine, on peut envisager de faire beaucoup de calculs puisque c'est elle qui les fait… On peut tracer beaucoup de graphiques puisque c'est elle qui les trace…

En choisissant (c'est une option du logiciel) de faire relier les points par des segments et en l'explicitant en classe, nous limitons la confiance aveugle des élèves en la machine : à chaque étape, elle relie les points par des segments ; à chaque étape, elle se contredit en intercalant de nouveaux points non alignés. Le questionnement théorique reste entier, mais, selon toute vraisemblance, la valeur cherchée est de mieux en mieux approchée.

Suffisamment près pour toute exploitation pratique : la précision obtenue est d'un cinquante millième de degré. Jamais assez près pour répondre totalement à la question. Le travail effectué par les élèves durant cette activité leur a permis de passer d'un mode de pensée algébrique (transformation de formules, expression d'une variable en fonction d'une autre, calculs de valeurs) à un mode de pensée fonctionnel (recherche de propriétés de la fonction en questionnant sa représentation graphique : continuité, variation, extremum).

Nous pensons qu'une telle activité aide les élèves à préparer la transition de la troisième à la seconde : sans anticiper sur les programmes du Lycée, nous voulons introduire les préoccupations qui seront les leurs, c'est-à-dire leur poser les problèmes avant que les réponses ne leur soient apportées.