Dans nos classes Lycée

Nouveau programme de T.E.S, Partie Analyse, Atelier consacré aux accroissements

Alain Patriti(*)

Résumé

Ce document met en évidence et illustre les principaux changements de la partie Analyse du nouveau programme de Mathématiques de Terminale E.S. Ces modifications imposent d'approfondir l'étude et la comparaison des accroissements absolus et relatifs.

Le texte ci-dessous est composé de trois activités qui utilisent la transdisciplinarité de ce thème pour introduire en les reliant : le papier semi-log, les dérivées logarithmiques et les équations différentielles. Ces activités tentent aussi de placer les élèves dans une démarche de recherche par « expérimentations, conjectures, preuves et applications » pour concourir à leur formation intellectuelle, conformément aux attentes renforcées du programme en ce sens.

Enfin, ces activités mobilisent largement les manipulations graphiques.

En annexe est proposé le tableau extrait du nouveau programme qui définit les termes d'accroissement absolu, relatif, moyen, intantané.

(*) Professeur de lycée. NICE.

1. Découverte des repères semi-log et ajustements non-affines

Modifications du programme illustrées par l'activité I

• Approfondissement de l'étude des divers types d'accroissements.

• « On pourra proposer des situations qui suggèrent des ajustements autres qu'affines. Ce pourra être l'occasion d'utiliser les papier semi-log et log-log. On pourra exploiter sur des exemples des situations d'ajustement se ramenant à des ajustements affines. »

Présentation de l'activité 1

Le renforcement de l'étude et de la comparaison des accroissements absolus et relatifs implique une très bonne maîtrise des repères semi-logarithmiques. Il faut donc que les élèves connaissent précisément leurs spécificités par rapport aux repères arithmétiques. L'activité 1 regroupe ces objectifs.

La première partie met en évidence l'incapacité des repères arithmétiques à représenter fidèlement des variations relatives très importantes et indique le principe de construction des graduations logarithmiques.

La deuxième partie qui se place dans un cadre de transdisciplinarité avec les statistiques guide l'exploitation d'une courbe en repère semi-logarithmique pour en éclaircir l'interprétation. Elle repose sur un travail pratique de mesure graphique de certaines valeurs de la fonction ln dans un processus inverse de la construction des graduations logarithmiques.

Pour finir, la troisième partie propose un petite question test.

Activité 1

Partie 1 : découverte du papier semi-logarithmique

Des analyses successives de 100 g de lait stérilisé ont permis de mesurer la quantité d'un type de bactéries toutes les heures suivant l'ouverture d'une bouteille placée dans un réfrigérateur. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

heure	0	6	12	18	24	30	36
nombre de bactéries	35	81	164	270	493	1096	1998

heure	42	48	54	60	66	72
nombre de bactéries	4914	10938	25703	54176	98715	198789

1) Représenter graphiquement (sur une feuille de papier millimétré classique) l'évolution du nombre de bactéries par rapport au temps en utilisant l'échelle qui semble la plus pertinente.

2) Le graphique obtenu représente-t-il efficacement toute l'évolution du nombre de bactéries par rapport au temps ? (argumenter la réponse en décrivant le problème rencontré).

3) Pour résoudre ce type de problème, on utilise un repère semi-logarithmique. Dans ce cas, la graduation de l'axe des ordonnées correspond aux logarithmes des nombres indiqués. Le repère utilisé pour définir la graduation logarithmique est appelé dans la suite repère canonique. Les zones séparant les puissances de 10 sont appelées modules.

a) Compléter :

- à la place de 0 est écrit … car ln(…) = 0,
- à la distance ln(2) est écrit …
- à la distance ln(…) est écrit 10,
- à la distance $\ln(10^2)$ est écrit …
- à la distance $\ln(10^3)$ est écrit …

Représenter une valeur x dans un repère … revient à représenter … dans son repère …

b) Expliquer pourquoi tous les modules ont la même taille.

4) Représenter l'évolution du nombre de bactéries sur le papier semi-logarithmique fourni (papier à 7 modules).

5) Que peut-on remarquer ?

Partie 2 : première exploitation du papier semi-logarithmique

1) Détermination de l'échelle de l'axe des ordonnées du repère canonique du papier semi-log fourni.

Compléter :

Sur l'axe des ordonnées du repère canonique, ln(10) est à … cm de l'origine, donc l'unité de cet axe mesure approximativement … cm, c'est-à-dire que 1 cm représente … unité.

2) Déterminer graphiquement les valeurs approchées à 10^{-1} prés des logarithmes des nombres de bactéries et compléter le tableau suivant.

heure	0	6	12	18	24	30	36
nombre de bactéries							

heure	42	48	54	60	66	72
nombre de bactéries						

3) Justifier la pertinence d'un ajustement affine entre les logarithmes des nombres de bactéries et le temps.

4) Déterminer un tel ajustement par la méthode des moindres carrés.

5) En déduire une modélisation de l'évolution du nombre de bactéries en fonction du temps. Représenter la fonction obtenue dans le repère semi-logarithmique.

6) Le lait est impropre à la consommation lorsqu'il contient plus d'un million de bactéries du type étudié par centaine de grammes. Déterminer graphiquement le moment où il faudra le jeter. Vérifier ce résultat par le calcul.

Partie 3 : deux petits tests de compréhension sur les repères semi-logarithmiques

1) Comment simuler un repère semi-log sur l'écran d'une calculatrice graphique ?

2) Déterminer graphiquement une valeur approchée à 10^{-1} prés de e^2, e^3, e^4.

Une activité sur le même thème

Une recherche d'ajustement non-affine peut être organisée sur le modèle de la partie 2 en utilisant un repère log-log. Elle conduit alors à une fonction puissance[1].

[1] Cf. : Murray R. Spiegle, « Théorie et application de la statistique », p. 36, Série Schaum, McGraw-Hill, 1990.

2. Évaluations d'accroissements relatifs, interprétation du nombre dérivé logarithmique, élasticité

Parties concernées du programme

• « On mettra en évidence que le papier semi-log est adapté aux lectures […] de variations relatives… ».

• « … on pourra appeler [le nombre dérivé logarithmique] croissance relative instantanée de f en a » et « On interprétera la lecture du coefficient directeur d'une tangente à la représentation de ln f, comme celle de la croissance instantanée relative de f au point correspondant ».

• « Exemples d'évaluation de la variation de $f(x)$ en pourcentage à l'aide d'une variation de x exprimée en pourcentage » et « on pourra utiliser l'approximation affine de f vue en première. On pourra évoquer la notion d'élasticité à propos d'exemples tirés des sciences économiques ».

Présentation de l'activité 2

La première partie de l'activité 2 permet d'interpréter le nombre dérivé logarithmique d'une fonction en un point comme le coefficient directeur de la tangente en ce point à sa courbe tracée sur du papier semi-log.

Les deux dernières parties se placent dans un cadre interdisciplinaire en reliant la notion économique d'élasticité à la dérivée logarithmique et aux propriétés graphiques des repères semi-log.

Activité 2

Partie 1 : interprétation du nombre dérivé logarithmique

Une grande surface de bricolage a modélisé la progression de son chiffre d'affaires quotidien par la fonction C définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$C(t) = 10^5 \times \sqrt{9{,}87 \times t + 2{,}72}$$

où le temps t est exprimé en année.

1) Représentation graphique.

On appellera Γ la courbe représentant C dans un repère semi-logarithmique à 1 module en prenant 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses.

a.) Représenter Γ.

b) On désigne par M_1, $M_{1.5}$, M_2, M_3, M_4, M_5 les points de la courbe Γ d'abscisses respectives 1, 1.5, 2, 3, 4, et 5. Tracer les droites (M_1M_5), (M_1M_4), (M_1M_3), (M_1M_2), $(M_1M_{1.5})$.

2) Expérimentation.

a) Compléter le tableau suivant :

x_i	5	4	3	2	1,5
Coefficients directeurs des droites $(M_1M_{x_i})$					
Accroissements relatifs moyens de la fonction C entre 1 et x_i					
Différences des deux lignes précédentes					

b) Que peut-on remarquer ?

3) Passage à la limite.

a) Soit $a_x(h)$ le coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe M_x et M_{x+h} d'abscisses respectives x et $x+h$; exprimer $a_x(h)$ en fonction de x et $x+h$.

b) Soit $t_x(h)$ l'accroissement relatif moyen de la fonction C entre x et $x+h$; exprimer $t_x(h)$ en fonction de x et $x+h$.

c) Montrer que $\lim_{h \to 0} a_x(h) = \lim_{h \to 0} t_x(h)$ pour tout nombre réel x.

d) Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie 2 : application à l'économie, notion d'élasticité

<u>Un petit rappel sur la notion d'élasticité en économie.</u>

Pour mesurer l'influence du prix d'un produit sur sa consommation, les économistes utilisent la notion d'élasticité-prix qui se définit comme le rapport de la variation relative de la consommation Q sur la variation relative du prix :

$$e_p = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

ou plus précisément

$$e_p = \frac{\dfrac{Q(p+h)-Q(p)}{Q(p)}}{\dfrac{h}{p}}$$

Sous cette forme, la valeur de l'élasticité à un prix p fixé est différente pour chaque choix de la variation h. Pour contourner cette multiplicité, les économistes décident usuellement de considérer des variations de h infiniment petites, ce qui transforme la définition en :

$$e_p = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{Q(p+h)-Q(p)}{Q(p)}}{\dfrac{h}{p}},$$

puis en transformant cette expression, on peut faire apparaître le nombre dérivé logarithmique de Q(t) en p :

$$e_p = \left(\lim_{h \to 0} \frac{Q(p+h)-Q(p)}{Q(p)\times h}\right)\times p$$

et donc :

$$e_p = Q_1(p)\times p$$

où Q_1 désigne la dérivée logarithmique de Q.

<u>Une illustration.</u>

Une étude locale de marché a permis de modéliser la consommation mensuelle de fraises en kg par habitant en fonction du prix par

$$Q(p) = \frac{p+162}{4p+10,8}$$

pour p compris entre 5 F et 35 F le kg.

1) Représenter Q sur une feuille de papier semi-log à un module.

2) Déterminer graphiquement l'élasticité-prix des fraises lorsque p = 10, puis lorsque p = 20. Vérifier ces résultats par le calcul.

Partie 3 : Évaluation de la variation de Q en pourcentage pour une variation de p en pourcentage

Dans cette partie, l'étude des erreurs commises lors des approximations ne sera pas traitée.

1) En utilisant l'approximation affine

$$Q(p+h) \approx Q(p) + h \times Q'(p),$$

argumenter sur la pertinence de l'évaluation de la variation en pourcentage de la consommation Q lorsque le prix subit une variation « assez petite » de *i* %, par la formule

$$\frac{Q\left(p+\frac{ip}{100}\right)-Q(p)}{Q(p)} \times 100 \approx Q_1(p) \times p \times i$$

2) Évaluer l'impact sur la consommation d'une hausse de 5 % du prix lorsque le kg coûte 10 F.

3) Évaluer l'impact sur la consommation d'une baisse de 7 % du prix lorsque le kg coûte 20 F.

3. Équation différentielle $\frac{f'}{f} = k$ et repère semi-logarithmique

Modifications du programme illustrées par l'activité 3

• « Équation différentielle $\frac{f'}{f} = k$, $f > 0$ » et « Interprétation en terme de fonctions à croissance relative, croissance absolue instantanée constante »

• « On mettra en évidence que le papier semi-logarithmique est adapté aux lectures et aux comparaisons de variations relatives ».

Présentation de l'activité 3

L'activité 3 se place dans le cadre de la comparaison des accroissements absolus et relatifs.

À partir du chapitre sur les primitives, les élèves savent que les fonctions à croissance absolue instantanée constante sont les fonctions affines ; cette activité leur montre que les fonctions à croissance relative instantanée constante (c'est à dire les solutions de l'équation différentielle $\frac{f'}{f} = k$, $f > 0$) sont les fonctions exponentielles.

La première partie exploite l'adéquation des repères semi-logarithmiques aux accroissements relatifs pour construire des courbes approchées par une adaptation de la méthode d'Euler[(2)]. Le seul but de ce travail expérimental est de nourrir l'intuition pour permettre l'émission de conjectures. Les justifications rigoureuses et l'étude des erreurs commises ne seront pas abordées dans ces questions.

Les élèves savent aussi que la différence de deux fonctions à croissance absolue instantanée constante identique (c'est à dire de deux fonctions affines de même coefficient) est constante. Pour souligner l'analogie, la deuxième partie de l'activité 3 établit que le quotient de deux fonctions à croissance relative instantanée constante est constant.

Activité 3

L'objectif de cette activité est de déterminer les fonctions strictement positives et dérivables sur **R** vérifiant une équation différentielle de la forme $\frac{f'}{f} = k$, $f > 0$ (où k est un nombre réel), c'est-à-dire dont la dérivée logarithmique (ou la croissance relative instantanée) est constante sur **R**.

Partie 1 : expérimentation graphique dans le cas de l'équation différentielle $\frac{f'}{f} = 3, f > 0$

Cette partie est consacrée à la construction de courbes approchées dans le seul but d'aider graphiquement à la détermination de solutions de l'équation différentielle $\frac{f'}{f} = 3, f > 0$.

L'étude des erreurs commises par les approximations employées n'est pas demandée.

Les courbes seront dessinées sur une feuille de papier semi-log à 7 modules.

1) Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur **R**. En utilisant l'approximation affine

$$\mathrm{f}(x+h) \approx f(x) + h \times f'(x),$$

(2) Cf. E. Lehman, « Mathématiques pour l'étudiant de première année », vol. 2, p. 152-155, 2e éd., Belin, 1984 et H. Cartan, « Cours de calcul différentiel », p. 111-114, Édition refondue et corrigée, Hermann, 1990.

argumenter la pertinence de l'évaluation de l'accroissement relatif moyen entre x et $x+h$ par le nombre dérivé logarithmique de f en x qui sera noté $f_1(x)$, si h est « assez petit ».

2) Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur **R**.

a) Justifier que la fonction $\ln \circ f$ est dérivable sur **R**.

b) En considérant l'approximation affine

$$\ln(f(x+h)) \approx \ln(f(x)) + h \times (\ln \circ f)'(x),$$

argumenter sur la pertinence d'utiliser le coefficient directeur de la droite passant par les points de coordonnées $(x,f(x))$ et $(x+h,f(x+h))$ dans un repère semi-log pour évaluer l'accroissement relatif moyen de f entre x et $x+h$, si h est « assez petit ».

3) Supposons qu'il existe une fonction f_2 strictement positive et dérivable sur **R**, solution de l'équation différentielle $\frac{f'}{f} = 3$ telle que $f_2(0) = 2$.

a) Proposer une valeur approchée t de l'accroissement relatif moyen de f_2 entre 0 et 0,5.

b) Placer le point M_0 $(0,f_2(0))$.

c) Localiser le point M_1 d'abscisse 0,5 correspondant à l'accroissement relatif moyen approché t en partant de M_0.

4) Comme précédemment, proposer une valeur approchée de l'accroissement relatif moyen de f_2 entre 0,5 et 1, puis localiser le point M_2 d'abscisse 1 correspondant à cet accroissement relatif moyen en partant de M_1.

Renouveler six fois cette construction avec un pas $h = 0{,}5$.

5) La fonction f_2 semble-t-elle être une fonction affine, puissance, exponentielle, ou logarithmique ? Conjecturer une expression de f_2 et vérifier si elle définit une solution de l'équation différentielle $\frac{f'}{f} = 3$, $f > 0$.

6) Supposons qu'il existe une fonction f_3 strictement positive et dérivable sur **R** solution de l'équation différentielle $\frac{f'}{f} = 3$, f > 0 telle que $f_3(0) = 3$. En reprenant la démarche des questions précédentes, proposer une courbe approchée de f_3, puis déterminer son expression.

7) Exprimer f_3 par rapport à f_2. Proposer et représenter d'autres solutions strictement positives de l'équation différentielle $\frac{f'}{f} = 3$.

Partie 2 : généralisation

1) Proposer des solutions aux équations différentielles de la forme $\frac{f'}{f} = k$, $f > 0$ (où k est un nombre réel).

2) Montrer que, si deux fonctions f_a et f_b dérivables et strictement positives sur **R** sont des solutions de l'équation différentielle $\frac{f'}{f} = k$, alors leur quotient est constant sur **R**.

3) Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\frac{f'}{f} = k$, $f > 0$.

Partie 3: application à un cas économique

Modéliser le chiffre d'affaires réalisé par un supermarché sur un produit dont les ventes progressent de 10 % par an, sachant que le chiffre d'affaires obtenu le premier jour de diffusion était de 50 000 F.

Activité sur le même thème

L'expérimentation graphique peut aussi être faite sur du papier arithmétique en utilisant directement la méthode d'Euler. Dans ce cas, il devient très facile de relier les suites géométriques aux fonctions exponentielles en construisant la suite des ordonnées en reliant l'approximation affine $f(x+h) \approx f(x) + h \times f'(x)$ à $\frac{f'}{f} = k$, $f > 0$, c'est-à-dire $f' = k \times f, f > 0$.

On obtient $f(x+h) - f(x) \approx h \times k \times f(x)$.

On peut alors construire la suite des ordonnées vérifiant $y_n - y_{n+1} = h \times k \times y_{n+1}$, c'est-à-dire $y_n = (1 + k)\, y_{n-1}$.

La valeur de y_n ne dépend que du choix des conditions initiales.

ANNEXE

OBJETS MATHÉMATIQUES	EXPRESSIONS COURANTES	SITUATIONS
$f(b) - f(a)$	Accroissement absolu de f entre a et b.	Les grandeurs à accroissement absolu constant sont modélisées par des suites arithmétiques : $u_{n+1} - u_n = k$.
$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$	Accroissement moyen de f entre a et b.	Coefficient directeur de la droite (AB). Vitesse moyenne. Grandeurs quotients.
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$	Dérivée de f en a. Croissance instantanée (absolue) de f en a.	Coefficient directeur de la tangente en A. Vitesse instantanée. Les fonctions à croissance instantanée constante sont les fonctions affines.
$\dfrac{f(b) - f(a)}{f(a)}$	Accroissement relatif de f entre a et b.	Pourcentage d'évolution. Grandeur sans dimension. Les grandeurs à accroissement relatif constant k sont modélisées par des suites géométriques de raison $1 + k$: $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = k$.
$\dfrac{f(b) - f(a)}{(b - a)f(a)}$	Accroissement moyen relatif de f entre a et b.	
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h f(a)}$	Dérivée logarithmique de f en a. Croissance instantanée relative de f en a.	Les fonctions à croissance instantanée relative constante sont les fonctions exponentielles.