

Dans nos classes

Collège

Des fiches pour la classe : Quadrilatères au Collège

Groupe de travail « Activités mathématiques au collège »

Voici la deuxième activité que le groupe de travail présente dans le Bulletin Vert. Rappelons que l'objectif de ce groupe de travail est de proposer des activités « clé en main » utilisables directement en classe après agrandissement au format A4, accompagnées des objectifs pédagogiques et de diverses remarques.

Le document d'accompagnement suit la présentation des quatre fiches d'activités proposées ici.

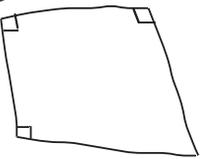
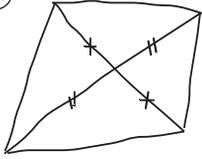
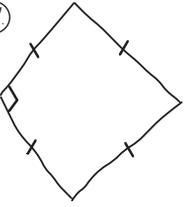
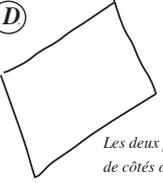
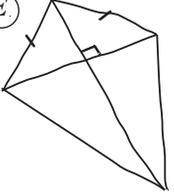
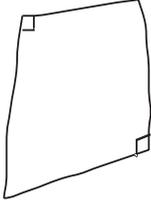
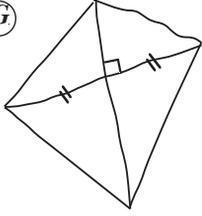
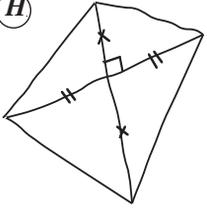
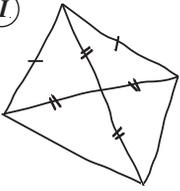
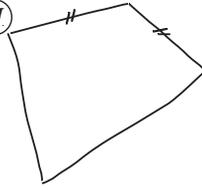
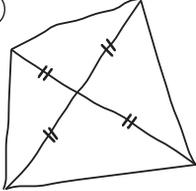
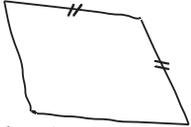
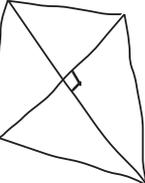
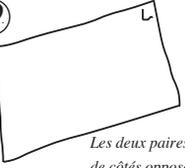
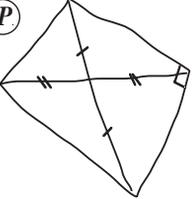
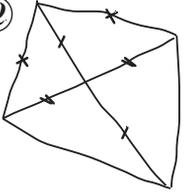
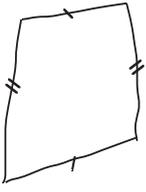
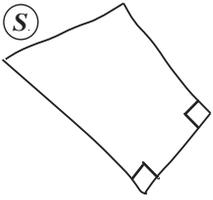
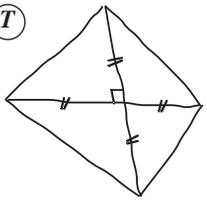
N'hésitez pas à nous transmettre vos remarques, vos idées et vos propositions d'activités. D'avance merci.

Jean FROMENTIN

Quadrilatères au Collège (Fiche 1)

Les figures ci-dessous ont été réalisées à main levée ; chaque dessin montre les quatre côtés d'un quadrilatère, et, pour certains d'entre eux, les diagonales. Certaines informations ont été portées sur les dessins sous forme codée.

À partir des codages, et des renseignements complémentaires pour certaines figures, donne le nom, s'il en existe un, de chaque quadrilatère. Sinon, écrire : « sans nom ».

<p>A</p>  <p>.....</p>	<p>B</p>  <p>.....</p>	<p>C</p>  <p>.....</p>	<p>D</p>  <p>Les deux paires de côtés opposés sont parallèles.</p> <p>.....</p>
<p>E</p>  <p>.....</p>	<p>F</p>  <p>.....</p>	<p>G</p>  <p>.....</p>	<p>H</p>  <p>.....</p>
<p>I</p>  <p>.....</p>	<p>J</p>  <p>.....</p>	<p>K</p>  <p>.....</p>	<p>L</p>  <p>Les deux paires de côtés opposés sont parallèles.</p> <p>.....</p>
<p>M</p>  <p>Les deux paires de côtés opposés sont parallèles.</p> <p>.....</p>	<p>N</p>  <p>.....</p>	<p>O</p>  <p>Les deux paires de côtés opposés sont parallèles.</p> <p>.....</p>	<p>P</p>  <p>.....</p>
<p>Q</p>  <p>.....</p>	<p>R</p>  <p>.....</p>	<p>S</p>  <p>.....</p>	<p>T</p>  <p>.....</p>

Quadrilatères au Collège (Fiche 2)

Voici une liste de textes correspondant aux codages des quadrilatères de la fiche 1.

Associe à chaque dessin le texte qui le décrit.

- 1** : Les diagonales du quadrilatère sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.
- 2** : Le quadrilatère a trois angles droits.
- 3** : Les diagonales du quadrilatère se coupent à angle droit.
- 4** : Les deux diagonales du quadrilatère sont perpendiculaires et l'une passe par le milieu de l'autre.
- 5** : Les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu, ont même longueur et sont perpendiculaires.
- 6** : Les côtés opposés du quadrilatère sont parallèles, deux des côtés consécutifs sont perpendiculaires et ont même longueur.
- 7** : Deux des angles opposés du quadrilatère sont droits.
- 8** : Deux côtés du quadrilatère sont perpendiculaires à un même troisième côté.
- 9** : Les côtés opposés du quadrilatère sont parallèles et deux des côtés consécutifs ont même longueur.
- 10** : Deux des côtés consécutifs du quadrilatère ont la même longueur et les diagonales sont perpendiculaires.
- 11** : Les côtés opposés du quadrilatère ont même longueur.
- 12** : Les diagonales du quadrilatère ont même longueur et se coupent en leur milieu.
- 13** : Les côtés opposés sont deux à deux parallèles.
- 14** : Les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu et deux des côtés consécutifs ont même longueur.
- 15** : Deux côtés consécutifs du quadrilatère ont même longueur.
- 16** : Le quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur et un angle droit.
- 17** : Les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu et deux des côtés consécutifs sont perpendiculaires.
- 18** : Deux des côtés consécutifs du quadrilatère ont même longueur, ses diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu.
- 19** : Les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu.
- 20** : Les côtés opposés du quadrilatère sont parallèles et deux des côtés consécutifs sont perpendiculaires.

Quadrilatères au Collège (Fiche 3)

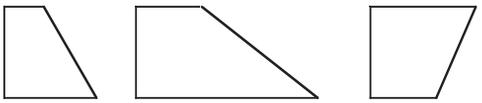
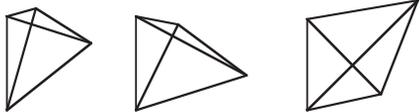
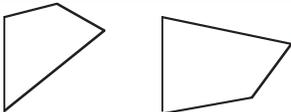
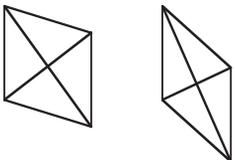
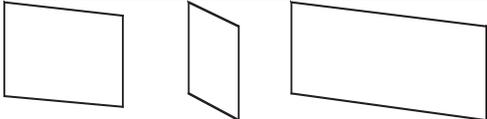
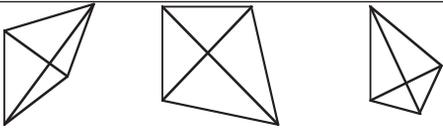
Voici une liste de textes correspondant aux dessins des quadrilatères de la fiche 1. Associe à chaque dessin le ou les textes qui le caractérisent.

- 1** : Ce parallélogramme est un losange car il a deux côtés consécutifs de même longueur.
- 2** : Ce quadrilatère est un trapèze rectangle car il a deux angles droits consécutifs.
- 3** : Ce quadrilatère a deux angles droits ; mais ses côtés opposés ne sont pas forcément parallèles.
- 4** : Ce parallélogramme a deux côtés consécutifs perpendiculaires et de même longueur ; c'est donc un carré.
- 5** : Ce quadrilatère est un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires ; c'est donc un carré.
- 6** : L'une des diagonales de ce quadrilatère est médiatrice de l'autre ; c'est tout.
- 7** : Les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires ; rien de plus.
- 8** : Ce quadrilatère est un rectangle car il a trois angles droits.
- 9** : Les diagonales de ce quadrilatère sont médiatrices l'une de l'autre.
- 10** : Ce parallélogramme est un rectangle car deux de ses côtés sont perpendiculaires.
- 11** : Ce quadrilatère est un parallélogramme car ses diagonales ont même milieu, et seulement cela.
- 12** : Ce rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur ; c'est donc un carré.
- 13** : Ce quadrilatère est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu. De plus il a un angle droit ; c'est donc un rectangle.
- 14** : Ce losange a un angle droit ; c'est donc un carré.
- 15** : Ce quadrilatère a deux côtés consécutifs de même longueur ; c'est tout.
- 16** : Les diagonales de ce quadrilatère se coupent en leur milieu ; c'est donc un parallélogramme. De plus il a deux côtés consécutifs de même longueur ; c'est un losange.
- 17** : Les côtés opposés de ce quadrilatère sont parallèles et c'est tout : c'est donc seulement un parallélogramme.
- 18** : Les diagonales de ce quadrilatère sont deux diamètres d'un même cercle ; rien de plus : c'est un rectangle.
- 19** : Ce quadrilatère, dont les côtés opposés ont même longueur, est un parallélogramme.
- 20** : L'une des diagonales est un axe de symétrie du quadrilatère, sans plus.

Quadrilatères au Collège (Fiche 4).

Tous les quadrilatères ci-dessous, rangés en 9 familles, ont été construits à partir d'un même segment vertical. Découvre, par observation, ce qui caractérise chaque famille, ce qui varie dans chaque famille, et répartis les quadrilatères de la fiche 1 dans ces diverses familles (désigne-les par leur lettre dans la colonne de droite).

Les dessins qui suivent ont été faits très soigneusement, mais les propriétés qu'ils possèdent ne sont ni dites, ni codées. Tu te fieras donc à ce que tu perçois.

①		
②		
③		
④		
⑤		
⑥		
⑦		
⑧		
⑨		

Document d'accompagnement

Sujet : Reconnaissance des quadrilatères par leurs propriétés caractéristiques.

Objectif(s) : Ils dépendent des différentes utilisations proposées ci-après. Mais, dans toutes ces utilisations, l'objectif essentiel est de lire et interpréter un dessin codé et de faire utiliser les propriétés caractéristiques des quadrilatères.

Référence(s) aux programmes

Contenu <i>Sixième</i>	Compétences exigibles <i>se rapportant à cette activité :</i>	Commentaires
Reproduction de figures planes simples.	Tracer et reproduire sur papier blanc les figures suivantes : ... rectangle, losange, carré...	Les travaux de construction d'une figure, à l'aide d'instruments ou dans un environnement informatique s'appuieront sur sa définition ou certaines de ses propriétés. Les travaux géométriques permettront aussi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant par exemple sur les propriétés d'orthogonalité et de parallélisme.
Construction de figures symétriques élémentaires et énoncé de leurs propriétés	Relier les propriétés de la symétrie axiale à celles des figures du programme.	Ces travaux conduiront à : ... - l'énoncé et l'utilisation de quelques propriétés caractéristiques des figures précédentes. On veillera à toujours formuler ces propriétés à l'aide de deux énoncés séparés.

Contenu <i>Cinquième</i>	Compétences exigibles <i>se rapportant à cette activité :</i>	Commentaires
<p>Transformation dans le plan et parallélogramme.</p> <p>Parallélogramme.</p> <p>Figures simples ayant un centre ou des axes de symétrie.</p>	<p>Connaître et utiliser une définition du parallélogramme et des propriétés relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles.</p> <p>Connaître et utiliser une définition et des propriétés (relatives aux côtés, aux diagonales, aux éléments de symétrie) du carré, du rectangle, du losange.</p>	<p>Ces travaux (sur la symétrie) conduiront à l'énoncé et l'utilisation de propriétés caractéristiques du parallélogramme.</p> <p>Le travail entrepris sur le parallélogramme et la symétrie centrale aboutit ainsi à des énoncés précis que les élèves doivent connaître. Des séquences déductives pourront s'appuyer sur ces énoncés.</p> <p>On poursuit le travail sur la caractérisation des figures en veillant à toujours la formuler à l'aide d'énoncés séparés.</p>

L'ensemble des activités proposées à partir de la fiche 1 permet d'observer si les élèves possèdent mentalement les propriétés des quadrilatères ou de développer ces acquisitions. Le dessin à main levée, nécessairement et volontairement approché, empêche les élèves de décider de la nature du quadrilatère à partir de sa forme. Ils sont donc obligés d'analyser les renseignements donnés par le dessin ou par le texte, et d'utiliser les propriétés des quadrilatères pour en déduire sa nature. Voici les diverses utilisations de cette fiche 1 et les objectifs spécifiques de chacune des activités proposées.

I) Contrôle de connaissances (fiche 1)

Modalités : Travail individuel.

Description et commentaires :

À l'origine, cette fiche 1 a été créée avec pour objectif le contrôle de connaissances en Cinquième. Le nombre et la variété des situations proposées réduisent le hasard au niveau des réponses. En revanche, le fait de demander seulement la réponse laisse à l'élève la possibilité d'utiliser une

démarche mentale « visuelle » (fabrication mentale d'un dessin conforme aux propriétés données), sans nécessiter la formalisation d'une démarche déductive.

Réponses à la fiche 1 : Trapèze - S, parallélogrammes - BDR, rectangles - AKOP, losanges - HLQ, carrés - CIMT, « cerf-volant » - EG, « sans nom » - FJN.

II) Du dessin au texte. Description et interprétation d'un dessin (fiche 1)

Modalités : Travail individuel, en groupe, ou oralement avec toute la classe.

Description de l'activité et commentaires :

La fiche 1 peut être utilisée en l'état, dès la Sixième, pour apprentissage de la lecture et de la description de dessins codés. Les consignes sont données oralement par l'enseignant, et les élèves ont l'initiative de décrire ou d'interpréter. Par exemple, la figure C peut être décrite par : « *Les quatre côtés du quadrilatère ont la même longueur et l'un des angles est droit* ». C'est volontairement que ni les sommets, ni le point d'intersection des diagonales n'ont été nommés. Les difficultés de description rencontrées pour certaines figures (figure G, par exemple) peuvent faire découvrir aux élèves la nécessité de nommer les points : si A, B, C et D sont les sommets et I le point d'intersection des diagonales du quadrilatère de la figure G, il est aisé de la décrire par : « I est le milieu de [BD] et (AC) est perpendiculaire à (BD) », par exemple. Une description, sans les noms des sommets, de cette figure oblige à une interprétation d'un niveau plus élevé, par exemple : « *l'une des diagonales est perpendiculaire à l'autre diagonale en son milieu* » ou « *l'une des diagonales est médiatrice de l'autre* » (le mot « diagonale » désigne ici, peut-être abusivement mais volontairement, parfois une droite et parfois un segment). On peut ainsi moduler le degré de difficulté de l'activité qui peut alors être proposée à tous les niveaux du Collège.

III) Du texte au dessin (fiches 1, 2 et 3)

Modalités : Travail individuel ou en groupe.

Description de l'activité et commentaires :

C'est dans l'esprit de l'activité précédente que nous proposons les fiches 2 et 3. Il s'agit pour les élèves d'associer les textes aux dessins, la fiche 2

correspondant au niveau descriptif et la fiche 3 au niveau interprétatif signalés précédemment. Par rapport à l'activité précédente, cette dernière peut avoir aussi pour objectif la familiarisation à l'expression et à la démonstration en mathématiques. En rencontrant de telles phrases, en les associant à un dessin, l'élève pourra réinvestir ces formulations dans d'autres situations.

Réponses à la fiche 2 : 1-H, 2-A, 3-N, 4-G, 5-T, 6-M, 7-F, 8-S, 9-L, 10-E, 11-R, 12-K, 13-D, 14-Q, 15-J, 16-C, 17-P, 18-I, 19-B, 20-O.

Réponses à la fiche 3 : 1-LQ, 2-S, 3-F, 4-M, 5-T, 6-EG, 7-N, 8-A, 9-HQT, 10-MOP, 11-B, 12-IM, 13-P, 14-C, 15-J, 16-Q, 17-D, 18-K, 19-R, 20-EG.

IV) Construction avec les instruments de dessin ou à l'ordinateur (fiche 1)

Modalités : Travail individuel.

Description de l'activité et commentaires :

Le dessin à main levée est un procédé qu'il est nécessaire de développer auprès de nos élèves. Il aide à la lecture, il permet de visualiser rapidement une situation décrite dans un texte ou de résoudre un problème de construction. Il est aussi un moyen de communication ou une source d'informations. La fiche 1 peut donc donner lieu à une activité de construction, avec pour objectifs, d'une part, la lecture d'une information et seulement de l'information donnée (pas de figures particulières), et, d'autre part, l'usage des instruments de dessin appropriés : équerre pour les perpendiculaires, règle et équerre pour les parallèles, compas pour les reports de longueur. Cette fiche peut aussi servir de base à une activité de construction avec un logiciel de construction géométrique. Les propriétés de la figure choisie, et seulement celles-là, étant utilisées dans la construction, il sera intéressant d'en observer les conséquences en intervenant sur les objets de la figure : propriétés supplémentaires, invariants, objets libres ou liés. Cette distinction apparaît bien dans les logiciels : points « libres », points « semi-libres » (points sur objet), points « fixés » (intersection de deux objets, milieu...). Le questionnement du logiciel sur l'existence de telle propriété conjecturée est aussi une aide précieuse à la démonstration.

V) Le jeu des neuf familles (fiches 1 et 4)

Modalités : Travail individuel, en groupe, ou oralement avec toute la classe.

Description de l'activité et commentaires :

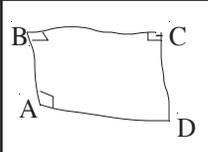
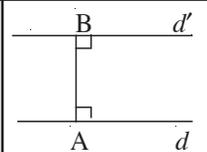
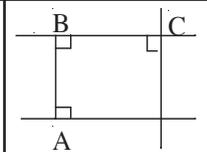
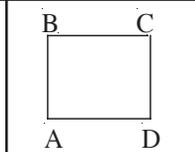
Il était question dans l'activité précédente d'objets liés ou libres d'une construction. Cette notion de degré de liberté développée dans le texte suivant a donné lieu à cette dernière activité que nous proposons avec la fiche 4. L'objectif de l'activité est essentiellement de repérer ce qui caractérise ou différencie les dessins d'une même famille.

Famille de quadrilatères correspondant à un codage

Le quadrilatère générique du plan dépend de huit paramètres réels ou assimilés (par exemples, dans le plan euclidien muni d'un repère, les coordonnées des quatre sommets ou les coordonnées de trois sommets et les mesures de deux angles dans le plan orienté). Pour dessiner un quadrilatère dont on a déjà fixé un des côtés, on a encore besoin de quatre informations indépendantes.

Le codage de chaque figure donne des informations, le plus souvent moins de quatre ; le dessinateur doit donc lui même choisir une ou plusieurs informations supplémentaires pour dessiner un quadrilatère répondant au codage donné ; il obtient ainsi une famille de solutions dépendant d'un ou plusieurs paramètres.

Exemple (codage A).

			
<p>Pour construire un quadrilatère correspondant à ce codage, ...</p>	<p>on trace arbitrairement le côté $[AB]$ et les deux perpendiculaires d et d' à ce côté passant par A et B ; ...</p>	<p>puis on <u>choisit</u> un point C sur d' et on trace la perpendiculaire à d' passant par C ; ...</p>	<p>le point D est l'intersection de cette dernière droite avec la droite d.</p>

On obtient ainsi, $[AB]$ étant donné, une famille de rectangles à un paramètre (le point C sur une droite). Les mécaniciens parlent alors d'un degré de liberté.

Si on avait fixé le segment $[BC]$ le paramètre aurait été le point A sur une droite.

Si on avait fixé le segment $[CD]$ ou le segment $[AD]$ le paramètre aurait été le point B sur une droite.

En bref, le codage donne trois informations (trois angles) ; le premier côté étant fixé, il manque une information qu'il revient au dessinateur de choisir.

Dans le tableau qui suit, pour chaque schéma codé de la fiche 1, nous fixons et nous appelons systématiquement $[AB]$ le segment, situé sur la gauche, le plus proche de la verticale (ou, en cas d'ambiguïté, le plus proche de la lettre désignant le dessin). S'il intervient, nous nommons I l'intersection des diagonales. L'information « les deux paires de côtés opposés sont parallèles » sera traduite par « deux angles nuls » (terminologie à l'usage du professeur). Chaque fois, le quadrilatère est nommé ABCD.

Le choix d'un point sur une droite ou un cercle déjà tracés fournit un paramètre ; le choix d'un point « libre » du plan fournit deux paramètres.

nom	information(s) fournie(s)		paramètre(s)	
A	3	trois angles droits	1	le point C ou le point D, chacun sur une droite
B	2	égalités de longueurs	2	le point I, ou l'un des points C ou D
C	4	un angle droit et trois égalités de longueur	0	
D	2	deux angles nuls	2	le point C ou le point D
E	2	un angle droit et une égalité de longueur	2	le point C ou le point D
F	2	deux angles droits	2	le point C sur une droite et le point D sur un cercle
G	2	un angle droit et une égalité de longueurs	2	le point C ou le point D
H	3	un angle droit et deux égalités de longueurs	1	le point I ou le point C, chacun sur un cercle
I	4	quatre égalités de longueurs	0	

J	1	une égalité de longueurs	3	les points C et D, le deuxième sur un cercle
K	3	trois égalités de longueurs	1	le point I
L	3	deux angles nuls et une égalité de longueurs	1	le point C ou le point D, chacun sur un cercle
M	4	deux angles nuls, un angle droit et une égalité de longueurs	0	
N	1	un angle droit	3	le point I sur un cercle et les points C et D sur des droites
O	3	deux angles nuls, un angle droit	1	un point sur une droite
P	3	un angle droit et deux égalités de longueurs	1	un point sur une droite
Q	3	trois égalités de longueurs	1	le point C sur un cercle
R	2	deux égalités de longueurs	2	le point B ou le point C
S	2	deux angles droits	2	le point C
T	4	un angle droit et trois égalités de longueurs	0	

Remarques :

- Si « diagonale » est pris au sens de droite et non de segment, et a fortiori si les diagonales ne figurent pas sur le dessin, certains codages de la fiche 1 permettent de construire des quadrilatères non convexes.

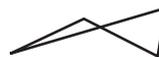
C'est le cas des codages E, F, G, J, N, R et S :



E ou G



F



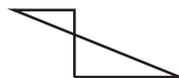
J



N



R



S

(par contre si les diagonales, au sens de segments, ont un point commun le quadrilatère est nécessairement convexe).

Peu d'élèves y penseront spontanément car il est difficile de ne pas tenir compte de la convexité apparente sur le dessin.

Il est possible de conduire l'ensemble des activités, soit sans soulever le problème, soit en se limitant explicitement aux quadrilatères convexes ; une activité supplémentaire peut aussi porter sur la recherche des quadrilatères non convexes.

Pour tenir compte de cette remarque, dans la fiche n° 4 ne figurent volontairement que des quadrilatères convexes.

• On considère des quadrilatères dont un des côtés a été fixé. Alors :

Il y a quatre carrés : les quadrilatères C, I, M et T de la fiche 1 qui forment la famille 6 de la fiche 4. ([6] : C, I, M, T).

Les rectangles forment une famille à un paramètre ([4] : A, K, O, P).

Les losanges forment une famille à un paramètre ([5] : H, L, Q).

Les parallélogrammes forment une famille à deux paramètres ([7] : B, D, R).

Les trapèzes forment une famille à trois paramètres.

Les trapèzes rectangles forment une famille à deux paramètres ([1] : S).

Les trapèzes isocèles forment une famille à deux paramètres.

Les quadrilatères ayant leurs diagonales perpendiculaires forment une famille à trois paramètres ([2] : N).

Les « cerfs-volants » forment une famille à deux paramètres ([8] : E, G).

Les quadrilatères « articulés » (dont les longueurs des côtés sont données) forment une famille à un paramètre.

etc.

La famille [3] concerne les quadrilatères ayant deux côtés consécutifs de même longueur ([3] : J), et la famille [9] concerne les quadrilatères ayant deux angles opposés droits (inscritibles dans un cercle) ([9] : I).