

Dans nos classes École élémentaire

La table de Pythagore

Nicole Bonnet^(*)

L'atelier que j'ai animé lors des Journées Nationales de l'A.P.M.E.P. d'Albi est issu d'un travail que j'avais mené pour le colloque C.O.P.I.R.E.L.E.M.⁽¹⁾ de Rennes (du 25 au 30 mars 1996). Une autre vision que celle que je vais vous présenter ici est publiée dans les actes du colloque de Rennes : il s'agit d'un document de formation destiné à des formateurs (I.M.F., Conseillers pédagogiques, I.E.N, Professeurs d'I.U.F.M.) qui interviennent en formation initiale ou continue des enseignants au niveau de l'école élémentaire. La mise en œuvre de celui-ci est relativement longue : il faut disposer d'au moins six heures.

L'atelier ayant séduit des professeurs de collège qui enseignent en 6^e ou 5^e, j'ai pensé le réorganiser et le présenter lors des journées d'Albi.

En une heure trente minutes, je n'ai pu qu'expliquer quelques séances à l'aide d'un support vidéo, répondre à des interrogations de mise en œuvre et faire jouer rapidement les participants au jeu de Pythagore et à quelques puzzles.

Le point de départ du travail est le jeu de la « table de Pythagore » que l'on peut trouver dans « Jeux 2 », publication de l'A.P.M.E.P. n° 59,

^(*) Professeur de mathématiques à l'I.U.F.M. premier degré de Bourgogne, centre de Nevers.

⁽¹⁾ La C.O.P.I.R.E.L.E.M. est la Commission Permanente des I.R.E.M. sur l'Enseignement Élémentaire. Elle siège à l'I.R.E.M. de Paris 7, Université Denis Diderot, Tour 56/55, 2 place Jussieu, 75251 Paris 7.

légèrement modifié (Document 3) qui fait l'objet des six premières séances présentées ici. Puis, en séance 7, j'ai inventé le jeu de la « Bataille navale de Pythagore » et en séance 8 j'ai utilisé des jeux de F. Boule, mon collègue de l'IUFM de Dijon.

J'ai fabriqué les huit séances et j'ai contacté des institutrices (Mmes Gauthé et Cippriani, École Guynemer de Nevers) qui ont bien voulu consacrer du temps, le soir après la fin des classes, pour entrer dans ma démarche et mettre en œuvre ces séances.

* Le cadre de classe est donc le suivant : élèves en difficulté par rapport à la table de multiplication en CM1/CM2.

* L'objectif est d'améliorer les capacités des élèves sur leurs connaissances du répertoire multiplicatif.

* Le test initial (Document 1) a donné les résultats suivants :

CM 1 A : moyenne 8,6/10	CM2 A : moyenne 9,1/10
B : moyenne 2,5/10	B : moyenne 4,8/10

Le même test, après une progression d'une dizaine de séances (certaines ont été reprises deux fois), a donné les résultats suivants :

CM 1 A : moyenne 9,5/10	CM2 A : moyenne 9,9/10
B : moyenne 5,5/10	B : moyenne 9,4/10

Comme vous pouvez le constater, les progrès sont plus manifestes dans la partie B.

Voici, de manière exhaustive, le descriptif des séances. Pendant toutes les séances, les élèves disposent de leur table de Pythagore personnelle, remplie en séance 1. On verra qu'au bout de quelques séances, ils peuvent s'en passer.

Séance 1 : Mise en évidence des propriétés remarquables de la table

Matériel : pour chaque enfant, une table de Pythagore (10×10) où une dizaine de cases sont déjà remplies.

Consigne : Que représente cette grille ? Remplissez-la complètement (Le maître vérifie à l'aide d'un transparent). Quelles sont les « astuces » qui vous ont aidé à la remplir ?

Remarques attendues :

- * Échanges lignes/colonnes.
- * La diagonale est axe de symétrie (commutativité) : $8 \times 5 = 5 \times 8$.
- * Fréquence de répétition des nombres : certains nombres ne sont écrits qu'une fois, d'autres sont écrits deux fois, etc...

* Dans la table 10×10 , on ne trouve pas tous les nombres de 1 à 100. La liste exhaustive est fastidieuse et ne sera pas demandée en classe, mais on pourra la faire sur une table réduite, 5×5 par exemple.

* Observation des lignes : différence entre deux naturels consécutifs dans la table.

Exemple de la ligne de 9 : 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90.

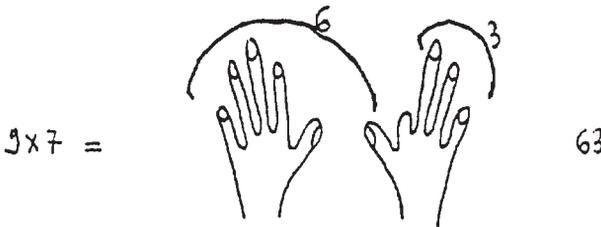
* les unités diminuent régulièrement de 1 en 1, et les dizaines augmentent régulièrement de 1 en 1.

* La somme des chiffres vaut toujours 9 ($1 + 8 = 9$, $2 + 7 = 9$, $3 + 6 = 9$, $4 + 5 = 9$, ...)

Cette observation débouchera peut-être sur le critère de divisibilité par 9 : seuls les nombres dont la somme des chiffres vaut 9 sont divisibles par 9.

Ouverture possible vers la preuve par 9.

* Montrer aux enfants une aide permettant de lire la table de 9 sur les doigts des deux mains : les doigts des deux mains sont numérotés de 1 à 10 ; replier le septième doigt, à sa gauche 6 doigts, à sa droite 3 doigts ; on lit $9 \times 7 = 63$.



(* La somme de deux multiples de 9 est un multiple de 9. Qu'en est-il du produit ?).

Observations a posteriori :

Les enfants ont très bien réagi et ont eu des idées à profusion :

* Sur la ligne ou la colonne de 2, « on ajoute 2 chaque fois » : 2 ; $2 + 2 = 4$; $4 + 2 = 6$; $6 + 2 = 8$; ...

* Présence d'un « axe de symétrie » que les enfants matérialisent par pliage.

* « Quand on veut calculer 6×9 , on peut faire $(6 \times 10) - 6$ ».

* Remarques sur la ligne de 9 concernant l'enchaînement des chiffres des unités qui diminuent (de 1) et des chiffres des dizaines qui augmentent (de 1 à chaque fois).

* Remarques sur la ligne de 5 : les nombres finissent tous par 0 ou 5.

* Remarques sur la périodicité de la table de 3 :

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
			∧	∧	∧	∧	∧	∧	∧
			1+2	1+5	1+8	2+1	2+4	2+7	3+0
			∪	∪	∪	∪	∪	∪	∪
3	6	9	3	6	9	3	6	9	3

- * Dans la table, il y a quatre façons « d'avoir 8 » : 1×8 ; 8×1 ; 2×4 ; 4×2 .
- * Puis les enfants ont cherché la fréquence de répétition des nombres de la table.

Séance 2 : mise en évidence des propriétés remarquables de la table (suite)

Les élèves ont leur table de Pythagore 10×10 remplie.

Colorier tous les nombres impairs de la table et faire des remarques.

Un nombre impair se trouve à l'intersection d'une ligne impaire et d'une colonne impaire. Conclusion : Le produit de deux nombres impairs est toujours un nombre impair.

Dans les autres cases, il n'y a que des nombres pairs. Conclusion : un nombre pair peut être obtenu soit comme produit de deux nombres pairs, soit comme produit d'un nombre pair par un nombre impair.

Le produit d'un nombre pair par un nombre pair est-il toujours pair ?

Puis la maîtresse a induit un petit jeu de questions rapides sur des exemples numériques : « Comment sera le résultat quand je multiplie 7 par 5, 25 par 42, 48 par 66, ... ? » Ce « jeu » a été repris par des enfants qui devenaient les « questionneurs ».

Observations a posteriori :

Les enfants de CM1 ne savaient plus (ou pas ?) ce qu'étaient les nombres pairs. Ce sont ceux de CM2 qui ont rappelé la définition.

Les enfants ont trouvé facilement les règles suivantes et les ont notées sur leur cahier du jour :

- Le produit de deux nombres impairs est toujours un nombre impair.
- Le produit de deux nombres pairs est toujours un nombre pair.
- Le produit d'un nombre pair par un nombre impair est toujours un nombre pair.

Séance 3 : mise en évidence des propriétés remarquables de la table (suite)

Situation-problème : la « croix magique ».

Organisation : travail possible par groupes de deux ou quatre enfants.

Matériel : morceau de papier calque ; les élèves disposent toujours de leur table de Pythagore remplie et du document 2.

Consigne : Voici des croix magiques, trouve des solutions pour chaque croix. Laquelle est une solution qui se trouve dans la table de Pythagore ?

Observations a posteriori :

Les enfants sont motivés par l'aspect jeu. De plus, ce travail est un prétexte

- au calcul mental qui utilise les quatre opérations ;
- à la création d'images mentales concernant la proximité de certains produits et un repérage rapide de la zone de la table concernée (cela constituera une aide lors du jeu en séances 4, 5, 6).

Autres possibilités (séances non menées dans le cadre de cette étude)

1. Les « rectangles magiques »

Choisir dans la table de Pythagore quatre cases qui soient les sommets d'un rectangle. Calculer les produits en croix suivant les diagonales. Constatations. (Est-ce général ? Justifier ce fait).



Cela est toujours valable, il s'agit d'une propriété de proportionnalité.

2. Chiffre des unités de la table

Matériel : distribuer une grille vierge (10 x 10) à chaque enfant.

Consigne : Remplir cette grille en écrivant le chiffre des unités du produit et faire des remarques.

* Les remarques attendues concernent les périodes pour les chiffres des unités dans les lignes de 2, 4, 5, 6, 8, 10.

* D'autre part, tous les chiffres de 1 à 9 se trouvent dans la table des 3 et

dans la table des 7, mais il n'y a pas de régularité apparente. Ce sont les tables les plus difficiles à mémoriser.

3. À propos de proportionnalité



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70

Marquer les points de coordonnées $(a; 7 \times a)$ sur un graphique. Que remarquez-vous ?

Cela permet de manière simple :

- * d'introduire un tracé de fonction linéaire.
- * de faire des remarques graphiques sur les propriétés de linéarité.

Quelle est l'image de 3,5 ? Remarquer que $f(3,5) = f(7/2) = 1/2 \times f(7) = 49/2 = 24,5$

Quelle serait l'image de 15 ? Extrapolation ou remarque suivante :

$$f(15) = f(7 + 8) = f(7) + f(8) = 49 + 56 = 105$$

$$\text{ou } f(15) = f(9 + 6) = f(9) + f(6) = 63 + 42 = 105$$

$$\text{ou } f(15) = f(3 \times 5) = 3 f(5) = 3 \times 35 = 105$$

(il est clair que la notation fonctionnelle est à l'usage des enseignants, non des élèves).

Séance 4 : présentation du jeu de la table de Pythagore

Objectif : améliorer la connaissance de la table de multiplication.

I.O. 1995 - Cycle II : « ... À partir du calcul réfléchi, savoir élaborer (mentalement...) le résultat de certains calculs ... multiplicatifs ... il aura été particulièrement exercé à la pratique du calcul mental... ».

- Cycle III : « ... L'élève aura été entraîné à la pratique régulière du calcul mental dont il maîtrisera les méthodes usuelles (additionner mentalement, réaliser certaines multiplications de tête)... ».

Découverte du jeu en classe entière

Matériel : Document 3, une grande table de Pythagore vierge affichée au tableau, cent cartons portant les nombres naturels de la table. Les cases de la diagonale principale sont hachurées.

La classe est partagée en deux équipes. Les enfants participent à tour de rôle. Les règles du jeu sont énoncées et affichées au tableau,

progressivement, par la maîtresse. Elles ne sont pas données entièrement d'un seul coup.

Un adulte peut lire et, par sa bonne compréhension, intégrer l'enchaînement des règles. Je pense qu'il est préférable d'énoncer les règles au fur et à mesure, en jouant avec des enfants du cycle III.

Observations a posteriori :

La maîtresse a, au préalable, écrit les règles du jeu sur des grands cartons (1 m × 30 cm). Elle les sort au fur et à mesure de l'énonciation de celles-ci. (Cette méthode est très satisfaisante car elle permet de gagner du temps pour les parties ultérieures).

Grande motivation des enfants : ils veulent tous participer, aller au tableau, et pour éviter la bousculade, la maîtresse désigne deux élèves qui lèvent le doigt (un de chaque camp).

Les enfants ont tellement apprécié la séance que la fin a amené des « déjà ! » décus. La maîtresse a dû promettre d'organiser une revanche pour les perdants.

Séance 5 : Découverte des stratégies du jeu

On utilise ici une règle du jeu simplifiée par rapport à celle figurant dans le document 3 : il n'y a pas de pioche ; si on ne peut pas jouer, on passe son tour.

Phase 1. Travail sur une portion de table 5 × 5 (Document 4)

Organisation : travail par deux sur feuille photocopiée.

Déroulement : jouer par deux en tenant compte des règles du jeu simplifié. La maîtresse indique comment remplir la feuille pour pouvoir ensuite l'analyser : quand on place un nombre sur la grille, on le barre dans la liste et on indique sur le tableau le nombre joué.

Formulation : la maîtresse choisit quatre exemples, deux où A gagne, deux où B gagne et conduit l'analyse des stratégies.

Phase 2. Travail sur une table de Pythagore 10 × 10

Chaque groupe reçoit une table de Pythagore (10 × 10) sur laquelle la diagonale principale a été hachurée, huit cases ont été remplies. Chaque groupe a une liste de huit nombres.

Organisation : Travail par groupes de quatre : on joue deux contre deux.

Formulation : Analyse du jeu élève, deux groupes : l'un où A gagne, l'autre où B gagne.

Phase 3. Évaluation individuelle du même type

Commentaires :

Les stratégies sont les suivantes :

- * Poser le plus tôt possible les cartes qui existent en plusieurs exemplaires, pour éviter que l'autre joueur n'utilise une case momentanément libre.
- * Poser le plus tard possible les cartes qui n'existent qu'en un seul exemplaire (cases hachurées sauf 4, 9, 16, 36).
- * Se débarrasser des cartes trop éloignées du jeu.

Observations a posteriori :

* Après un premier jeu rapide sur une table 5×5 , la maîtresse a fait constater que, suivant les cartons distribués, A ou B pouvaient gagner. Voir les exemples de jeux d'élèves (Document 5).

* Le jeu simplifié sur table 10×10 a également beaucoup motivé les enfants.

Il semble intéressant de noter sur le tableau du bas les différents coups pour une analyse en fin de partie de deux jeux : un où A gagne, l'autre où B gagne. Cependant il est à noter une difficulté de décodage, par exemple : il est quelquefois difficile, à la relecture de savoir quel 12 a été placé en premier (cela sur une table 10×10).

Séance 6 : Le jeu de la table de Pythagore (fin)

Organisation : le jeu est une partie opposant deux adversaires.

Matériel : une planche de jeu (grille vierge avec la diagonale hachurée) et les cent cartes de la table de Pythagore pour deux enfants.

Règle complémentaire :

Lorsqu'un joueur se trompe de case, deux cas peuvent arriver :

- Les autres joueurs s'en aperçoivent : le joueur fautif doit enlever sa carte du jeu et en prendre une dans la pioche.
- Les autres joueurs ne s'en aperçoivent pas tout de suite : la partie continue jusqu'au moment où l'erreur est révélée, la carte étant alors simplement remise dans la pioche.

Observations a posteriori :

Le jeu est accueilli favorablement, les élèves veulent rejouer même quand ils perdent.

Même si en séance 4, des élèves utilisent encore leur table de Pythagore personnelle, en séance 6, ils peuvent s'en passer : « ça va plus vite » et ils s'investissent entièrement dans le jeu.

À la fin de ces séances, une interrogation contradictoire émerge : « faut-il apprendre la table de multiplication pour jouer ou faut-il jouer pour apprendre la table » La réponse s'exprime dans une dialectique...

Séance 7 : la bataille navale de Pythagore

Organisation : travail par deux.

Matériel : Chaque enfant a à sa disposition une table vierge et la règle de positionnement des navires.

Consigne : Vous allez jouer à la bataille navale de Pythagore. La règle de la bataille navale « ordinaire » est rappelée. Une difficulté sémantique est à souligner : 12 n'occupe pas la même case dans la colonne du 4 ou dans la ligne du 4.

J'ai fabriqué ce jeu à la demande des participants du colloque de Rennes qui ont perçu une nette complémentarité avec le jeu de la table de Pythagore. Il n'a pas été testé en classe.

Séance 8 : Autres jeux

Les puzzles de la table de Pythagore et les tables incomplètes (d'après une idée de François BOULE).

Phase 1

Organisation : travail individuel.

Matériel : Chaque enfant a à sa disposition les morceaux d'un puzzle.

Consigne : reconstituer le puzzle de la table de Pythagore ; quand elle sera terminée, échanger ton puzzle avec celui de ton voisin, celui-ci validera ta production.

Deux variantes : l'une facile, dans laquelle tous les nombres sont écrits ; l'autre difficile où certains nombres ont été effacés (document 6).

Phase 2 : Les tables incomplètes

Organisation : travail par deux.

Matériel : chaque groupe d'enfant possède une fiche photocopiée et doit la remplir (Document 7).

Validation : par le maître ou par un camarade.

Observation : le puzzle du document 6 est difficile pour des enfants de l'école primaire ; pour le rendre accessible, j'ai colorié les contours avant de le découper.

BIBLIOGRAPHIE

- * Brochure A.P.M.E.P. Jeux et activités numériques /jeux 2 / n° 59.
- * Brochure A.P.M.E.P. La multiplication à l'école élémentaire / Elem math II.
- * Jeux de calcul du C.P. au C.M.2. François BOULE chez A. COLIN.

DOCUMENT 1

TEST INITIAL et FINAL

A. Complète les tableaux suivants :

a	2	7	5	3	4	6	10	1	9	8
$a \times 5$										

b	4	6	9	1	10	2	7	5	3	8
$b \times 3$										

c	5	7	9	3	1	8	2	4	6	10
$c \times 8$										

d	7	3	6	10	9	4	2	5	1	8
$d \times 9$										

e	8	9	1	6	4	10	3	7	2	8
$e \times 7$										

B. Complète les tableaux suivants :

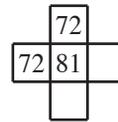
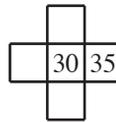
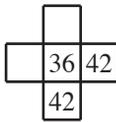
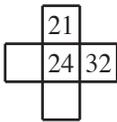
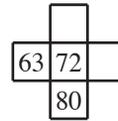
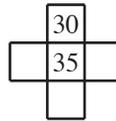
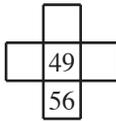
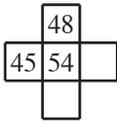
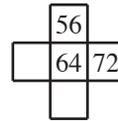
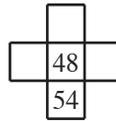
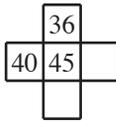
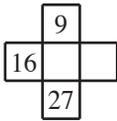
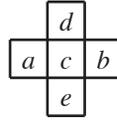
\times	4		9	8
7		42		
			45	
			72	
	24			

\times				
	27			
		35	49	
	15			
		40		16

DOCUMENT 2 LA CROIX MAGIQUE

On a préalablement trouvé que dans une « croix magique »
 $a + b = d + e = 2 \times c$.

Tu peux trouver plusieurs solutions pour chaque croix.
 Laquelle est une solution qui se trouve dans une table de
 Pythagore ?



DOCUMENT 3

Objectif : amélioration de la connaissance de la table de multiplication.

Durée : 20 à 30 minutes.

Matériel pour deux joueurs :

* Une table de Pythagore (non reproduite ici) de la multiplication pour les nombres naturels de 1 à 10 (plaque de carton fort ou de bois). Les cases de la diagonale principale sont hachurées.

* Cent petits cartons destinés à être placés dans les cases et sur lesquels sont inscrits les produits qui doivent figurer dans la table.

On aura ainsi, quatre cartons portant le nombre 12 (pour 4×3 ; 3×4 ; 2×6 ; 6×2), trois cartons portant le nombre 16 (4×4 ; 2×8 ; 8×2), un carton portant le nombre 81 (9×9), etc.

But du jeu : Se débarrasser le plus rapidement possible de ses cartons.

Règles du jeu :

- * Les cartons sont mélangés et retournés de façon à ce qu'on ne voie pas le nombre qui y figure.
 - * Les joueurs tirent à tour de rôle deux cartons et les placent sur les cases « convenables » de la table de Pythagore (ils ont ainsi déposé quatre cartons sur la table).
 - * Chacun prend au hasard vingt cartons. Le reste de cartons constitue la pioche.
 - * On joue à tour de rôle.
 - * Un carton ne peut être posé que sur une case adjacente à un carton déjà placé.
 - * Celui qui place un carton sur une case hachurée a le droit de remettre dans la pioche un carton de son choix parmi ceux qui lui restent .
 - * Celui qui ne peut pas jouer tire un carton dans la pioche et passe son tour.
 - * Le vainqueur est celui qui, le premier, se débarrasse de tous ses cartons.
- Deux cases sont dites adjacentes lorsqu'elles ont un côté commun.

DOCUMENT 4

LE JEU DE LA TABLE DE PYTHAGORE

Jeu simplifié :

Il n'y a pas de pioche : si on ne peut pas jouer, on passe son tour.

×	1	2	3	4	5
1					
2					
3		6			
4	4				
5					

A	B
4	2
8	4
9	6
25	12

Entoure le gagnant.

	1er tour	2e tour	3e tour	4e tour	Elimine
A					
B					

DOCUMENT 5 TRAVAUX D'ÉLÈVES

EXEMPLE 1

X	1	2	3	4	5
1	/	2			
2		/	6		
3		6	/		
4	4	8		/	
5					/

A	B
4	8 -
8 =	4 →
8 -	6 -
25	12

Entourer le gagnant

	1 ^{er} tour	2 ^e tour	3 ^e tour	4 ^e tour
A	8	9	/	
B	4	6	2	

25 points
12 points

EXEMPLE 2

X	1	2	3	4	5
1	/	2			
2		/	6		
3		6	/		
4	4	8		/	
5					/

A	B
4	8 -
8 =	4 →
8 -	6 -
25	12

Entourer le gagnant

	1 ^{er} tour	2 ^e tour	3 ^e tour	4 ^e tour
A	8	9	/	
B	4	6	2	

25 points
12 points

DOCUMENT 6 TABLE-PUZZLE

(difficile)

C'est une table de Pythagore dans laquelle on a effacé quelques cases, puis effectué un découpage.

1			9
	8	12	
6		15	24
	20		
	15	35	45
7			54
	24	32	42
			64
		54	80
	20		80

Pour rendre ce puzzle plus accessible à des enfants du cycle III, on peut souligner d'une couleur rouge, par exemple, les bords extérieurs du carré.

DOCUMENT 7 TABLES INCOMPLÈTES

Il s'agit de tables de multiplication dont on a effacé le contenu de certaines cases.

Mais attention : les têtes de lignes et de colonnes ne sont pas rangées en ordre croissant.

	3		2
		18	
			10
	12		16
		54	36

		6	4
		6	
			4
7			77
	12		

DOCUMENT 8

LA BATAILLE NAVALE DE PYTHAGORE

Le joueur A place sur sa grille :

- un porte-avions de cinq cases,
- un cuirassé de quatre cases,
- trois croiseurs de trois cases,
- deux sous-marins de deux cases,
- deux canots d'une case.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Exemple.

Le joueur B dit « 16 colonne du 8 ».

Le joueur A répond « À l'eau ».

Le joueur B dit « 12 colonne du 4 ou 12 ligne du 3 ».

Le joueur A répond « Touché ».

Le joueur B dit « 15 colonne du 5 ».

Le joueur A répond « Touché ».

Le joueur B dit « 9 ».

Le joueur A répond « Coulé ».

Un croiseur a été coulé.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2								o		
3			×	×	×					
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Le joueur B adopte deux types de notation sur sa grille mémoire, suivant qu'il « touche », « coule » ou « va à l'eau ».