Dossier
Le séminaire 1998

Le continu et les moyens de calcul ou l'incalculable existe-t-il ?

Roger Cuppens[*]

Le continu est apparu successivement sous la forme de droites géométriques, puis de l'ensemble **R** des nombres réels qui est l'une des notions fondamentales des mathématiques actuelles. On sait que l'enseignement de ces notions pose de nombreux problèmes didactiques. Nous montrons que l'introduction massive des moyens de calcul, si elle est indispensable, ne peut que compliquer la situation.

1. Rappels historiques

Rappelons[1] l'histoire du continu.

Chez les grecs, la notion de continu est inconcevable. On admet seulement la notion intuitive de droite géométrique. Par contre, la notion de nombre réel n'existe pas et il faut être Bourbaki pour voir dans la théorie des grandeurs développée par Euclide un équivalent de cette notion.

[*] IREM, Université Paul Sabatier, Toulouse.

[1] Très rapidement et donc presque caricaturalement.

C'est par affaiblissement progressif de la notion de nombre que la situation change au XVII^{e} siècle : le calcul différentiel et intégral se développe avec les travaux de Newton et Leibniz (et autres…), le lien avec la géométrie apparaissant avec l'œuvre de Descartes. On admet alors que la notion de base est celle de droite géométrique et que l'ensemble des réels se comprend par référence à cette droite[(2)]. Ceci ne pose pas de problème sérieux car les seules fonctions alors concevables étaient les combinaisons de certaines fonctions de base (puissances, exponentielle, logarithme, …).

La situation change radicalement au début du XIX^{e} siècle : la géométrie euclidienne n'apparaît plus comme une vérité absolue et les fonctions les plus générales apparaissent avec les travaux de Cauchy et ceux sur les séries de Fourier (où la notion de continuité joue un rôle fondamental). Des difficultés sérieuses apparaissent, par exemple la démonstration du théorème que nous énonçons maintenant « Toute suite de Cauchy est convergente ». Pour résoudre ceci, plusieurs constructions de l'ensemble **R** sont données qui s'avéreront toutes équivalentes[(3)].

En 1900, tout semble résolu : le « paradis » mathématique, selon l'expression de Hilbert, est construit. Tout l'édifice repose sur la non-contradiction de l'introduction de l'ensemble **N** des entiers[(4)] et Hilbert propose la démonstration de cette non-contradiction comme le premier des problèmes fondamentaux restant à résoudre[(5)].

Malheureusement, en 1904, apparaît un problème resté insoupçonné auparavant : toute l'analyse repose sur un axiome appelé depuis « axiome du choix » et dont on peut déduire des résultats tels que le théorème de Zermelo : « l'ensemble **R** peut être bien ordonné », sans que l'on soit capable de fournir explicitement un tel ordre.

[(2)] Rappelons que l'on n'admit « réellement » les nombres complexes que lorsqu'on découvrit leur représentation géométrique.

[(3)] On sait que la position actuellement la plus saine est d'admettre ce résultat (ou d'autres équivalents) comme axiome, les constructions servant alors à montrer la non-contradiction (relative) d'un tel axiome.

[(4)] Depuis, on a remplacé la notion de vérité mathématique par celle de non-contradiction : ceci apparaît-t-il dans notre enseignement ?

[(5)] On sait qu'une vingtaine d'années plus tard, Gödel ruinera définitivement cet espoir en montrant que, dans tout système axiomatique contenant les entiers, il y a une proposition indécidable : démontrer la non contradiction de l'ensemble **N** est donc impossible !

Ce résultat paradoxal (et d'autres) choque des mathématiciens tels que Poincaré et Lebesgue(6), mais est accepté pour ses conséquences : si on refusait l'axiome du choix, presque tous les résultats obtenus en analyse depuis Cauchy seraient sujets à caution.

Seul Brouwer a osé sauter le pas en refusant l'axiome du choix : on ne peut admettre une infinité de choix que si l'on donne une méthode pour faire ces choix sans ambiguïté. Ceci l'amène à refuser la notion de nombre réel quelconque : pour Brouwer, un nombre réel n'est défini que si l'on connaît un algorithme permettant de calculer (au moins théoriquement) ses décimales. Sur ces idées, il crée, aux Pays-Bas, une école de pensée connue depuis sous le nom d'*intuitionnisme*(7) et qui, tel le village d'Astérix, résiste encore à l'envahisseur.

2. État des lieux

On peut se demander si le développement des moyens de calcul accessibles à tous crée une situation nouvelle. S'il en est ainsi, nous ne pouvons l'ignorer car une idée couramment répandue (et qu'il nous faut combattre) est qu'un ordinateur ne peut se tromper. Nous nous contenterons de quelques remarques simples.

Même en admettant un ordinateur « idéal » où l'on pourrait introduire des nombres « à virgule » de longueur arbitraire, un nombre introduit dans cet ordinateur doit être « calculable » : si $x = a_0, a_1 \dots a_n \dots$, on doit avoir un algorithme permettant de calculer explicitement le chiffre a_n(8) : c'est exactement le point de vue adopté par Brouwer. On doit admettre que l'axiome du choix fournit un monde idéal qui n'est pas celui de l'ordinateur.

(6) Avec l'axiome du choix, Lebesgue a fourni un exemple de sous-ensemble non mesurable de l'ensemble **R**, mais s'est déclaré non satisfait par sa démonstration : il voulait éliminer l'utilisation de l'axiome du choix. On a montré depuis que dans la théorie Z-F des ensembles sans axiome du choix, l'existence de sous-ensembles non mesurables de **R** est indémontrable : si la théorie Z-F avec l'axiome du choix est non contradictoire, il en est de même de la théorie Z-F avec l'axiome « Tout sous-ensemble de **R** est mesurable ». Laquelle des deux théories choisir ?

(7) Parce que Brouwer admet, comme base commune à tous les mathématiciens, la notion (intuitive) de nombre entier.

(8) L'idée d'introduire les chiffres a_n « au hasard » ne peut être soutenue car on ne connaîtrait réellement le nombre x qu'à la fin du processus…

Une deuxième concerne la propriété fondamentale que l'ensemble **R** est totalement ordonné : si x et y sont deux nombres réels quelconques, on a l'une des propriétés : $x = y$, $x < y$ ou $y < x$. Si on introduit cette notion sans y prendre garde, elle pourrait faire penser que, pour deux nombres calculables différents, notre ordinateur idéal peut toujours déterminer lequel est le plus petit. Or il n'en est rien : il n'y a pas d'algorithme permettant ceci. Si une démonstration rigoureuse de ce résultat est compliquée, on peut facilement l'admettre puisqu'un algorithme fournissant une telle décision nécessiterait la comparaison d'un nombre arbitrairement grand de décimales.

Une conséquence est que, du point de vue calculable, il existe des nombres dont on ne peut pas déterminer s'ils sont positifs, négatifs ou nuls. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

n'est pas partout calculable[9] !

De plus, on connaît tous le théorème « si une fonction est continue sur un segment, elle atteint son maximum sur ce segment » dont la démonstration classique par dichotomie peut faire croire à un algorithme (l'utilisation de l'axiome du choix semble ici ne poser aucun problème). Bien sûr, on peut présenter des exemples de fonctions très aplaties où la précision des calculs ne permet pas d'aboutir réellement. De là à penser qu'avec un ordinateur idéal on puisse calculer l'abscisse du maximum, il y a un pas qu'il ne faut pas franchir comme le montre l'exemple sur [-1,+1] de la fonction $f(x) = kx$ où k est un nombre dont on ne sait pas s'il est positif ou négatif : le maximum est-il en -1 ou en +1 ? On pourrait fournir des exemples analogues pour le théorème des valeurs intermédiaires : ces résultats sont faux pour les intuitionnistes !

---

[9] Un autre exemple permettant de comprendre les réticences des intuitionnistes est le suivant : si f est l'indicatrice des rationnels et si c est la constante d'Euler (qui est calculable, mais dont on ne sait pas si elle est rationnelle ou irrationnelle), que vaut $f(c)$?

[10] Au moins !

3. Conclusion

On voit que ce rapide exposé montre des difficultés épistémologiques souvent ignorées des enseignants. Deux questions[10] viennent alors à l'esprit :

• Faut-il enseigner l'analyse intuitionniste ? Sûrement pas à des débutants, ni l'analyse classique d'ailleurs. On peut se contenter d'une vague notion de nombre calculable et familiariser les élèves avec les méthodes de calcul différentiel et intégral, ce qui peut se faire sur des « bonnes » fonctions où les problèmes de continuité ou de dérivabilité ne se posent pas (ou peu)[11]. Il est alors important que les enseignants ne mettent pas de fausses idées dans la tête de leurs élèves : la connaissance du point de vue intuitionniste peut alors les aider. Cette connaissance montre aussi qu'au niveau post-bac des cours d'analyse comportant des phrases telles que « soit **R** l'ensemble de tous les nombres réels » ou « soit x un nombre réel quelconque » sans aucun commentaire peuvent poser des problèmes à des élèves s'ils les appliquent à leurs images mentales (évidemment calculables).

• Pourquoi l'analyse classique si éloignée de la « réalité » a-t-elle tant d'applications ? La réponse réside sans doute dans les développements de l'analyse intuitionniste : pour les « bonnes fonctions », les résultats fondamentaux restent vrais, mais avec des démonstrations plus compliquées[12]. On comprend alors qu'en se plaçant dans un monde idéal avec l'ensemble gigantesque qu'est l'ensemble **R** et un outil tel que l'axiome du choix, les raisonnements se simplifient, mais des phénomènes complexes (voire paradoxaux[13]) apparaissent.

---

(11) De même en géométrie, on pourrait commencer par une géométrie à la Cabri telle que je l'ai montré dans les Brochures APMEP n^os 104 et 105.

(12) Par exemple, en analyse classique, le théorème des valeurs intermédiaires est vrai pour les fonctions continues . Par contre, en analyse intuitionniste, ce résultat est faux en général, mais reste vrai pour une classe de fonctions plus restreinte..

(13) Tel que le « paradoxe de Banach » : étant données deux boules quelconques de $\mathbf{R}^3$, on peut découper la première en un nombre fini d'ensembles et déplacer les morceaux pour obtenir la deuxième. Bien entendu, les ensembles de découpage ne sont pas mesurables et la démonstration de ce résultat ne fournit pas explicitement la méthode de découpage (on « peut le faire » à la manière de Pierre Dac et Francis Blanche). L'existence de tels « paradoxes » dans les mathématiques classiques ne peut évidemment que renforcer les intuitionnistes dans leur attitude.