Dossier
Le séminaire 1998

Métamorphoses d'exercices

Régis Gras(*)

Le texte présenté ici a fait l'objet d'un exposé lors du séminaire annuel de l'APMEP qui s'est tenu les 16 et 17 mai 1998 à Paris. Il a ainsi bénéficié des remarques des participants, mais également de celles des groupes de travail EVAPM-TERM et « Prospective Bac » et de celles de la commission du Bulletin APMEP. À travers quelques exemples, prenant en compte ces remarques, je tente de faire la preuve qu'il est possible de modifier profondément la présentation d'un exercice ou d'un problème de mathématiques de manière :

* d'une part, à chercher à solliciter chez l'élève de l'enseignement secondaire des composantes variées de son activité mathématique,
* et, d'autre part, à travailler à des niveaux *a priori* différents de difficulté.

Cette méthodologie, que j'appelle métaphoriquement métamorphose, peut être utilisée, à tout niveau d'enseignement et, par exemple, au lycée, pour décliner un texte selon une palette variée d'exercices susceptibles de concerner d'autres filières que la seule filière scientifique.

En guise d'introduction, prenons les quatre petits exercices suivants qui sont proposables en Terminale scientifique et qui ne présentent pas un caractère de grande originalité :

(*) IRESTE, Université de Nantes

1° *Étudier la fonction réelle* : $x \mapsto k\, a^x$ *où a et k sont deux constantes réelles données.*

2° *Résoudre l'équation récurrente* : $u(n+1) = a\, u(n)$ *où n est un entier naturel et a une constante réelle.*

3° *Résoudre l'équation différentielle* : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = s$ *où s est une constante réelle.*

4° *Résoudre l'inéquation en x* : $a < \mathrm{e}^x$ *où a est une constante réelle positive.*

Il est possible d'assembler ces exercices en un problème cohérent et mathématiquement plus riche puisqu'il permet de montrer qu'une équation récurrente peut conduire à une équation différentielle en passant du temps discret au temps continu.

Problème : *Deux propositions d'épargne me sont faites* :
* *ou bien à intérêts annuels dont le taux est r %,*
* *ou bien à intérêts composés dont le taux est s %. On suppose que, dans ce cas, le calcul se fait à temps continu, et non pas à la journée.*

Comparer les deux propositions et donner la condition pour que la première soit moins avantageuse que la seconde.

Application : $r = 3{,}5\ \%$, $s = 3{,}1\ \%$.

Ce problème conduit à la résolution des exercices précédents. Mais il vise un objectif de connaissance intéressant par la comparaison, d'une part, de la notion d'équation récurrente

$$u(t+1) = u(t) + r\, u(t)$$

qui conduit à la solution :

$$u(t) = u(0)\,(r+1)^t$$

et, d'autre part, de celle d'équation différentielle, en montrant que la seconde dérive (!) de la première en changeant de discret à continu le paramètre temps :

$$u(t+h) = u(t) + s\, h\, u(t)$$

qui conduit à

$$u'(t) = s\, u(t),$$

puis à la solution :

$$u(t) = u(0)\, \mathrm{e}^{st}.$$

Les connaissances exigées sont donc assez élémentaires bien que peu souvent mobilisées à l'occasion d'une mathématisation et de sa formalisation.

Elles sont généralement et plus volontiers en jeu à l'occasion de la résolution directe et indépendante ou bien d'une équation récurrente ou bien d'une équation différentielle, en raison de leur caractère novateur en classe terminale.

En revanche, analysés *a priori*, l'activité de l'élève et le niveau cognitif de mathématisation me semblent plus riches. Est-il possible de systématiser la variété des approches, conduisant l'élève à une meilleure synthèse de ses connaissances ? Sur ce plan strictement méthodologique, je vais ici utiliser deux outils qui permettent en effet de chercher à faire varier, d'une part, le niveau de complexité d'un exercice (taxonomie d'objectifs cognitifs), d'autre part, le type d'activité mathématique en jeu chez l'élève (typologie d'activités). Ces deux outils que j'ai conçus à d'autres fins, sont utilisés, comme le savent les usagers d'EVAPM, comme guides, parmi d'autres, pour écrire des textes d'exercices et cela en dépit de leur caractère relatif et quelquefois discutable quant à leur fidélité et leur accord avec leur but. En effet, comme le soutiendraient, à juste titre, Guy Brousseau et la majorité des didacticiens, la situation-problème, introduite au cours d'une évaluation ou d'un apprentissage, n'est perçue qu'en fonction du sens que l'élève lui accorde. Elle ne l'est encore que si elle s'inscrit dans un ensemble de situations où ses connaissances sont réalisées et où, le plus souvent, elles ont réussi. Elle est résolue dans le cadre des conceptions construites par l'élève, en général à son insu et inconnues de l'enseignant.

Je rappelle la présentation succincte des deux outils en question :

Taxonomie d'objectifs cognitifs

NIVEAU A

<u>Connaissance des outils de préhension de l'objet et du fait mathématiques</u>

(terminologie, action intériorisée, algorithmes simples, …)

NIVEAU B

<u>Analyse de faits et transposition</u>

(représentation, passage d'un registre à un autre, d'un cadre à un autre, …)

NIVEAU C

<u>Compréhension des relations et des structures</u>

(concept, relations avec d'autres concepts, raisonnement,
applications dans des situations familières, …)

NIVEAU D

Synthèse et créativité

(algorithmes composites,
construction de démonstrations et d'exemples personnels, généralisations,
applications dans des situations non routinières, ...)

NIVEAU E

Critique et évaluation

(distinction nécessaire-suffisant, critique de données et de méthodes,
critique de démonstration et donnée de contre-exemples, ...)

Classes essentielles de l'activité mathématique (typologie d'activités)

Classes	Heuristique	Traductive	Classificatoire	Calculatoire
Verbes d'action associés	bricoler, tâtonner, chercher	changer de registre ou de cadre, représenter, transposer	organiser, discerner, identifier	dénombrer, algorithmiser

Classes	Logique	Technique	Réinvestissement
Verbes d'action associés	prouver, convaincre, déduire	soigner, préciser	analyser, traduire, modéliser

Classes	Créative	Critique	Prédictive
Verbes d'action associés	inventer, imaginer, exemplariser	interpréter, évaluer, valider, invalider, optimiser	estimer, induire, prévoir, conjecturer

Illustrons l'emploi de ces classifications à travers quelques exemples.

EXEMPLE DE VARIATIONS D'EXERCICES SUR UN THÈME À PARTIR D'UN OBJECTIF COGNITIF OU D'ACTIVITÉ EN COLLÈGE OU EN SECONDE

Cet exemple peut être considéré, entre autres, comme un exercice de style, c'est-à-dire quelque peu artificiel, mais non dénué d'application didactique. Dans un premier temps, je présente, pour des classes de troisième ou de seconde, des « métamorphoses » du noyau primitif : « $3\,(x-2) \geq 36$ », au moyen de modalités extraites de la taxonomie précédente. Dans un second temps, il s'agira de « métamorphoses » du même noyau, au moyen de la typologie d'activités ci-dessus. Bien entendu, certains textes ne sont peut-être pas à donner comme tels aux élèves ; sans doute, serait-il nécessaire d'effectuer une adaptation ou une présentation à travers un apprentissage particulier. Mais le défi est accepté : une question peut changer significativement de nature et d'objectif en faisant appel, en toute hypothèse, à des niveaux supérieurs de difficulté et à des types peu communs d'activité pour un contenu mathématique défini. Cette démarche permet d'ouvrir l'éventail des compétences à évaluer, c'est-à-dire de prendre en compte, dans l'évaluation, des objectifs quelquefois négligés.

Noyau conceptuel

Considérons l'expression : « $3\,(x-2) \geq 36$ ».

Métamorphoses dans la complexité

Objectif A1 : Connaissance de la terminologie et du fait spécifique.

Vérifier que 15 *satisfait l'inéquation suivante où x est un entier naturel* :

$$3\,(x-2) \geq 36$$

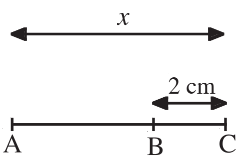
(*variante ouverte : «* 18 *satisfait-il l'inéquation précédente ? »*)

Objectif A3 : Effectuation d'algorithmes simples.

Résoudre dans l'ensemble **N** *des entiers naturels, l'inéquation* :

$$3\,(x-2) \geq 36.$$

Objectif B3 : Traduction d'un problème d'un cadre dans un autre.



On souhaite que le triple de la longueur AC *soit supérieur ou égal à* 36 cm.
Traduire ce problème, conformément à la représentation ci-contre, à l'aide d'une inéquation.

Objectifs C2-C3 : Compréhension d'un raisonnement : justification d'un argument, choix et ordonnancement d'arguments.

Résoudre, dans l'ensemble **N**, *l'inéquation* :

$$(x-6)^2 - 64 \geq 0.$$

Objectif C4 : Application dans des situations familières.

Marie, Jacques et Pierre ont autant d'argent dans leur porte-monnaie. On m'a dit que, même s'ils perdaient deux francs chacun, ils auraient *cependant en tout plus que ma fortune qui n'est que de* 36 F.

Combien chacun a-t-il au moins dans son porte-monnaie ? Préciser la procédure de recherche.

Objectif D2 : Construction de démonstration et d'exemples personnels.

Résoudre, dans l'ensemble **N**, *l'inéquation* :

$$x^2 - 12\,x - 28 \geq 0,$$

après avoir trouvé une valeur simple de x satisfaisant l'équation :

$$x^2 - 12\,x - 28 = 0.$$

Objectif D4 : Reconnaissance du modèle et application dans une situation non routinière.

Quel est l'âge minimum que peut avoir Pierre sachant que si on le rajeunit de deux ans, le triple de son âge est tout de même supérieur ou égal à celui de son père qui est de 36 *ans* ?

On indiquera, avec clarté, la méthode utilisée.

Objectif E2 : Critique de données.

On dispose d'un segment AB, *obtenu en enlevant* 2 cm *à la longueur d'un segment initial* S. *On juxtapose trois segments isométriques à* [AB] *pour constituer un côté d'un triangle dont les autres côtés ont pour longueurs respectives* 12 *et* 48 cm.

Quelle longueur doit avoir le segment S *pour que cette construction soit possible* ? (*on indiquera toutes les solutions entières acceptables et la méthode utilisée*).

Objectifs E1-E3 : Distinction du nécessaire et suffisant et critique d'argumentations avec construction de contre-exemple.

Voici la résolution, peut-être erronée, d'une inéquation où l'inconnue est un entier relatif :

$$-\,48\,x + 3\,x^2 \leq -\,84$$

$$\Updownarrow$$

$$-3\,(16\,x - x^2) \leq -\,3 \times 28$$

$$\Updownarrow$$

$$16\,x - x^2 \leq 28$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - 16\,x + 28 \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - 4\,x + 4 \geq 12\,x - 24$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-2)^2 \geq 12\,(x-2)$$
$$\Updownarrow$$
$$x-2 \geq 12$$
$$\Updownarrow$$
$$x \geq 14$$

Indiquer, s'il y a lieu, quelle(s) équivalence(s) du type $p \Leftrightarrow q$ est (sont) fausse(s).

À chaque fois, donner une valeur de x satisfaisant l'inéquation p et ne satisfaisant pas l'inéquation q.

Métamorphoses dans le champ des activités

On reprendra ici, bien souvent, des textes cités précédemment, à l'aide de leur référence Ai, Bj, Ck, …

Activité heuristique :

Trouvez par la méthode que vous préférez, quel est l'ensemble des entiers naturels x tels que :

$$3\,(x-2) \geq 36 \text{ et } 16\,x - x^2 \leq 28$$

L'élève peut « bricoler », tâtonner et procéder par « essais-erreurs ».

Activité traductive : *cf exercice* B3.

<u>Autre option</u> :

Représenter dans le plan repéré la fonction : $x \mapsto y = 3\,(x-2)$ et résoudre graphiquement l'inéquation dans l'ensemble $\mathbf{Z}^+$ l'inéquation : $3\,(x-2) \geq 36$.

Il s'agit ici de passer du cadre algébrique au cadre graphique et d'effectuer un travail d'interprétation dans ce dernier cadre.

Activité classificatoire :

Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui se ramènent, pour x entier relatif, à $x \geq 14$ et celles qui se ramènent à $x \leq 14$:

$x-2 \leq 12$	$3\,x \geq 42$	$[14,+\infty[\, \cap \mathbf{Z}^+$	$2\,x \leq 42 - x$
$3\,(x-2) \geq 36$	$-x \leq -14$;	$x \geq -14$	$-3\,(2-x) \leq -36$
$-x \geq 14$	$]-\infty, 14] \cap \mathbf{Z}^+$	$]-\infty, 14]$	$x = 14$

On présentera les résultats dans le tableau :

Expressions se ramenant à $x \geq 14$	Expressions se ramenant à $x \leq 14$	Expressions ne se ramenant ni à l'une, ni à l'autre

Il est ainsi demandé à l'élève de trier, selon trois critères, des expressions à lecture plus ou moins directe mais ne nécessitant pas de calculs algébriques complexes.

Activité calculatoire : *cf exercices* A3, C2-C3, D2.

Activité logique : *cf exercice* D2.

Activité logique et critique : *cf exercices* E1-E3.

Activité de réinvestissement : *cf exercices* B3, C4, D4 et E2.

Activité créative :
Construire une situation personnelle illustrant l'inéquation :

$$3(x-2) \geq 36.$$

L'imagination de l'élève est sollicitée. Il serait intéressant de noter les variétés de cadres auxquels les élèves font plus volontiers référence. Il est à craindre que les paraphrases de l'inéquation ne soient majoritaires.

Activité prédictive (ou prospective) :
Deux boîtes contiennent l'une trois papiers pliés, l'autre 38 *boules blanches ou noires. Sur chacun des papiers pliés figure, une fois, un et un seul des trois noms : Brésil, Italie et Allemagne. Se ravisant, on enlève deux boules blanches de la deuxième boîte. On mélange les boules et on procède à un tirage au hasard dans chacune des boîtes.*
Combien fallait-il qu'il y ait initialement de boules blanches pour que l'on ait maintenant plus de chances de tirer une boule blanche que de tirer le papier portant le nom du Brésil ?
On indiquera la méthode utilisée pour trouver le résultat.
La formalisation de cet exercice peut présenter quelques difficultés dues à la longueur du texte, mais le modèle probabiliste d'équiprobabilité est simple, accessible sans formation spécifique aux probabilités.

EXEMPLE DE VARIATIONS D'EXERCICES SUR UN THÈME À PARTIR D'UN OBJECTIF D'ACTIVITÉ EN LYCÉE

À travers cet exemple, toujours exercice de style, je veux montrer le caractère relatif des concepts en jeu au cours d'une phase d'évaluation en lycée, caractère qui en définirait trop souvent et univoquement l'activité de l'élève. Bien au contraire, l'exemple proposé ici montrera qu'il est possible de « métamorphoser » un noyau primitif de telle façon que soient mobilisées chez l'élève les composantes essentielles de son activité mathématique. Comme précédemment, il semble possible d'enrichir très sensiblement l'évaluation, de la placer à des niveaux et selon des types de difficulté différents.

Noyau primitif :

Considérons l'application f de $\mathbf{R}_+^*$ *dans* **R** : $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

Variante heuristique :

Trouver des entiers positifs a et b tels que $a^b = b^a$.

Pour résoudre cet exercice, l'élève peut « bricoler », tâtonner, dessiner, etc. L'exhaustivité n'est pas exigée.

Variante traductive :

Étudier les variations de l'application f. En donner une représentation graphique, et, en particulier, les asymptotes à la courbe.

Tableau de variations et courbe sont deux représentations de la même application. Elles relèvent du même cadre algèbrique, mais utilisent des registres différents tant qu'il s'agit de la simple traduction. Mais, par exemple, une activité sur le graphique menant à des lectures inverses, à des mesurages, conduirait à le considérer comme un cadre en lui-même, doté de ses propres concepts et de ses méthodes de résolution.

Variante classificatoire :

a étant un nombre rationnel positif, déterminer suivant ses valeurs, les intervalles de la demi-droite réelle positive dans lesquels les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$x < e^{ax} < x^2.$$

L'élève doit déterminer une classe d'intervalles respectant strictement un critère de choix. Les points de ces intervalles doivent satisfaire ce critère et être, dans ce cas, les seuls points de la demi-droite.

Variante technique :

Représenter très soigneusement sur du papier millimétrique la courbe représentative de l'application f. Déterminer à partir de cette courbe les valeurs de x pour lesquelles :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2\pi}.$$

Cette question exige de l'élève un travail précis et soigné, ce qui n'était pas demandé précédemment. Ce sont ces qualités de présentation qui seront prises en compte dans l'appréciation, le tableau de variations n'étant pas exigé. Ici, l'activité de l'élève se situe principalement dans le cadre graphique.

Variante calculatoire :

1re option : *Soit* $x = 10^{10}$. *Calculer à* 10^{-30} *près et à l'aide de développements limités la valeur de* $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

A priori, la calculatrice ne permettant pas d'effectuer ce calcul, la nécessité d'utiliser les développements limités de ln (1+x) et $\frac{1}{1+x}$ s'impose. La précision demandée exige que le choix des ordres d'arrêt des développements soit opportun. Ceux-ci étant actuellement hors-programme, il peut être intéressant de fournir aux élèves les expressions utiles afin d'en familiariser leur sens et leur emploi en termes d'approximation.

2e option : *Calculer* $\int_1^a \frac{\ln x}{x}\,dx$. *Déterminer a tel que* $\int_1^a \frac{\ln x}{x}\,dx = 1$.

La tâche de l'élève se ramène cette fois à l'intégration de la fonction sur un intervalle défini. La deuxième partie de la question exige un petit traitement paramétrique.

Variante logique :

Démontrer que, pour tout nombre réel x_1 *tel que* $1 < x_1 < \mathrm{e}$, *il existe un nombre réel unique* x_2 *tel que* $x_1 \ln x_2 = x_2 \ln x_1$.

L'élève doit apporter ici des arguments mathématiques, appuyés éventuellement sur l'intuition, alimentée elle-même par la représentation graphique, intuition qui serait illégitime pour la validation attendue.

Variante critique :

Est-il vrai qu'il existe au moins deux intervalles $I_1 \subset I_2$ *emboîtés, de même centre et tels que, pour a et b donnés, sur* $\left[0; \frac{1}{e}\right]$:

$$\forall x \in I_1, a < \frac{\ln}{x} < \frac{1}{e} \text{ et } \forall x \in I_2, b < \frac{\ln}{x} < \frac{1}{e}.$$

L'argument est à rechercher du côté de l'absence de symétrie de l'application.

Variante créative :

1^re^ option : *Déterminer une fraction rationnelle de x qui s'adapterait au mieux selon vous à l'application f en possédant les mêmes asymptotes et la même valeur au point* $x = \mathrm{e}$.

L'élève doit construire lui-même l'application demandée en cherchant à satisfaire successivement certains critères qui spécifient *f*.

2^e^ option : *Écrire une équation différentielle dont* $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ *serait solution.*

Variante réinvestissement :

1^re^ option : *On donne la valeur v du volume de l'hypercube de côté a dans l'espace à v dimensions. Quelle est la mesure a du côté* ?

L'élève doit comprendre inductivement le problème en considérant successivement les cas $v = 2$ (l'hypercube est un carré) et $v = 3$ (l'hypercube est le cube ordinaire). Il s'agit ensuite de transposer le problème à une dimension supérieure pour constater qu'il ne reste plus qu'une équation faisant intervenir l'application *f*.

2^e^ option: Discussion entre deux adolescents.

- 4 % d'intérêts par an, ça ne fait pas grand'chose ! dit l'un.

- Mais si ! rétorque l'autre, si tu vis assez vieux, tu peux gagner plus qu'en récoltant chaque année ta mise de départ !

- … (petit calcul) Là, tu exagères ! Tout le monde n'est pas Jeanne Calment !

Retrouver le « petit calcul », puis, sachant que l'on voudrait « gagner plus qu'en récoltant chaque année sa mise de départ » au bout de 50 ans, à partir de quel taux d'intérêt est-ce possible ?

(ce problème a été proposé par Catherine Dufossé dans le groupe de travail « Prospective Bac »).

Variante prédictive :

Peut-on trouver d'autres rationnels a et b que 2 et 4 *et tels que* $a^b = b^a$.

L'élève doit émettre une conjecture en partant de la résolution de l'équation $\frac{\ln x}{x} = a$. Il n'est pas exigé qu'il conduise la solution jusqu'à la détermination générale des rationnels répondant à la question.

Variante heuristique et prédictive :

Existe-t-il des points x où la valeur de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ *soit égale à celle de sa dérivée ? Ou bien soit égale à l'aire sous la courbe à partir de* $x = 1$?

Ici également, il n'est pas nécessaire de conduire la solution jusqu'à la détermination des points x. Les arguments extraits des variations des fonctions en jeu peuvent suffire.

En conclusion, les manuels actuels proposent une assez grande variété d'exercices. Mais que l'enseignant les utilise ou qu'il puise dans la littérature « annalistique » ou bien qu'il fabrique lui-même ses textes, il importe qu'il agisse avec le maximum de lucidité quant aux objectifs cognitifs poursuivis et aux activités mathématiques visées. Il importe tout autant qu'au cours de l'année ne devrait être négligé aucun de ces objectifs et activités possibles, surtout parmi ceux des niveaux « supérieurs ». En cela, j'espère avoir présenté des textes y répondant, exploitables par la suite avec beaucoup de degrés de liberté. S'exprimant également, à partir d'un même énoncé de base, en des registres et dans des cadres multiples, ils devraient permettre ainsi de personnaliser l'évaluation en fonction d'objectifs les plus divers et les mieux adaptés à nos fins didactiques.

Quelques références

Géométrie au premier cycle, tome 2, Brochure A.P.M.E.P. n° 22, 1978.

Les manuels scolaires de mathématiques, Brochure A.P.M.E.P. n° 30, 1979.

L'évaluation en mathématiques : perspectives institutionnelles, pédagogiques et statistiques, Actes de l'université d'été A.P.M.E.P., Valbonne juillet 1995, coordonnés par Michèle Pécal, Brochure A.P.M.E.P. n° 102, 1995.

EVAPM fin de première 1993, Fascicule 1.

EVAPM 6ème 1997, Fascicule 1.