Dossier
Le séminaire 1998

Une approche par des textes de la notion de dimension

Atelier de Rémi Langevin(*)

Visiter les notions mathématiques à travers l'histoire et en particulier à partir de textes, c'est ce que les propositions du GRIAM, où Rémi Langevin représente la SMF, ont préconisé en particulier pour les élèves des sections L.

Cet atelier (en deux séances) se veut une illustration de cette méthode, la notion traitée étant celle de dimension.

La première évocation de cette notion n'est pas l'œuvre d'un mathématicien : c'est la légende de la reine Didon. Échouant sur les rivages d'Afrique du Nord, Didon demanda au prince local une terre pour s'y établir. Celui-ci ne lui concéda que la surface comprise par une peau de bœuf. Didon découpa la peau de bœuf en fines lanières et put entourer une surface suffisante pour y fonder sa ville. Une peau mince permettrait un périmètre de 1000 à 2000 m, c'est à dire susceptible d'entourer entre 10 et 20 hectares. L'histoire est mentionnée dans l'Énéide. L'expérience a été réalisée par Rémi Langevin : il a découpé une feuille de papier A4 et réussi à faire ainsi le tour de notre grand « rectangle » de tables.

(*) Compte-rendu par Catherine Dufossé (Lycée de Marseille-Veyre) et Rémi Langevin (Professeur à l'Université de Bourgogne).

Une autre référence antique à la notion de dimension est la description dans la Bible de la Jérusalem de l'Apocalypse : sa taille est bien décrite en référence à sa longueur et sa largeur et pas seulement par la longueur de ses remparts.

Le premier texte mathématique présenté est un extrait d'un traité d'Aristote (384-322 av. J-C) : dans le chapitre premier du livre 1 du Traité du Ciel, il écrit : « *Parmi les grandeurs, l'une n'est divisible qu'en un sens unique, c'est la ligne ; l'autre l'est en deux, c'est la surface, l'autre l'est en trois, c'est le corps. Il n'y a pas de grandeur autre que celles-là, parce que trois est tout et que trois renferme toutes les dimensions possibles.* »

Aristote a donc une idée claire de ce que nous appelons dimension, mais, se référant à la géométrie de son temps, il n'imagine pas d'autre dimension que 1, 2 ou 3.

Ce texte devint un obstacle, bien des siècles plus tard, pour Oresme (1325-1382). Il connaissait bien l'œuvre d'Aristote puisqu'il en fût un traducteur.

Oresme réalise une première approche de la notion de fonction : un segment variable balaye une surface. C'est ce qu'il appelle « *la qualité d'une ligne* ». Il imagine ensuite « *la qualité d'une surface* », qui est représentée par le volume engendré par une surface variable, et il est conduit à pousser le raisonnement jusqu'à la dimension 4 : mais, halte-là, Aristote a dit que…

« *Si la qualité d'une ligne est représentée par une surface, et la qualité d'une surface par un corps à trois dimensions, la qualité d'un corps devra être représentée par quelque chose ayant dimension quatre dans une quantité différente. Je dis qu'il n'est pas nécessaire d'imaginer une quatrième dimension… En effet, Aristote dans le "De Caclo 1" dit que suivant sa méthode de représentation, aucun passage d'un corps à une différente sorte de quantité n'est possible.* »

C'est ainsi qu'en cette fin de Moyen Âge, de maître à penser, Aristote devient un empêcheur de penser.

Nous sautons quelques siècles encore et le texte suivant est un petit roman de Abott (1838-1926), Flatland (1884). Le texte est en anglais et Rémi Langevin nous en traduit quelques passages. (NB. il vient d'être publié en français, et Jacques Verdier en a fait un compte-rendu dans le BGV n° 83).

Cette parabole est un curieux mélange d'initiation à la géométrie et de critique sociale : Abott décrit toute une société vivant dans un monde de dimension deux. Les individus y sont des polygones. La hiérarchie sociale est figurée par le nombre de côtés. Le héros de l'histoire est un carré. Il reçoit la visite millénaire d'un être de dimension trois et, guidé par lui, entreprend un grand voyage, qui le conduit d'abord dans un monde de dimension un. Il s'efforcera d'expliquer ce qu'est la dimension deux aux êtres de dimension un, qui vivent alignés et correspondent par des sons. Puis, lui-même se trouvera plongé dans un monde de dimension trois et tentera de le comprendre.

Après ce plongeon dans la science-fiction, nous abordons un texte de Grassmann (1809-1877). Ce mathématicien allemand, autodidacte et original, a écrit un texte précurseur annonçant le calcul vectoriel et extérieur.

Dans un texte, extrait de « *La science de la grandeur extensive* », qui date de 1844, il décrit la genèse de sa découverte : sa somme de deux segments, définie par AB + BC = AC « *même quand* A, B, C *ne sont pas sur une ligne droite* », et où AB et BA sont des grandeurs opposées est manifestement notre addition vectorielle.

Son produit nous fait penser au produit vectoriel : « *je trouvai que le parallélogramme est à considérer comme le produit de deux côtés contigus, quand on prenait en effet non pas le produit des longueurs, mais celui de deux segments en tenant compte de leurs directions… On pouvait échanger les facteurs seulement quand on inversait en même temps les signes.* »

Ensuite Rémi Langevin précise : il est vrai que le produit vectoriel mesure l'aire orientée du parallélogramme, et retient dans quel plan se trouve cette aire ; cependant Grassmann, en voyant cette aire orientée dans son plan, ouvre la voie à la définition d'une notion indépendante de la dimension et de la codimension, alors que le produit vectoriel de deux vecteurs reste une opération liée à la seule dimension trois.

Grassmann explique que c'est le sentiment de cohérence qu'il retire de la distributivité qui le pousse à poursuivre.

Après les opérations sur les « *segments* », il parle d'opérations sur les points : « *On peut interpréter comme somme de plusieurs points leur centre de gravité, comme produit de deux points le segment qui les relie, comme produit de trois points l'espace plan s'étendant entre eux, et comme produit de quatre points le volume situé entre eux.* »

Développant ses idées, il comprend qu'il dépasse le cadre de la géométrie classique et qu'il est en train de créer un nouveau champ mathématique : « *L'Analyse que j'avais découverte ne se situait pas seulement, comme il me semblait au début, dans le domaine de la géométrie, mais j'aperçus bientôt que j'avais atteint là le terrain d'une nouvelle science, dont la géométrie* *elle-même n'est qu'une application particulière. (…) L'avantage était que la limitation à trois dimensions devenait caduque, De cette façon seulement, les lois étaient mises en lumière dans leur évidence et dans leur universalité et se présentaient dans leur contexte essentiel, et certaines régularités qui, à trois dimensions, soit n'existaient pas encore, soit n'existaient que de façon cachée, s'épanouissaient alors en toute leur clarté par cette généralisation. »*

Je ne connais rien des théories de Grassmann, mais je comprends fort bien ce passage quand je réfléchis à l'orthogonalité dans l'espace. L'orthogonalité de deux droites ou d'une droite et d'un plan se généralise en dimension plus grande : dans $\mathbf{R}^n$, l'orthogonal $\mathrm{H}^{\perp}$ d'un sous-espace de dimension p est un sous-espace de dimension q où $p + q = n$. Les deux espaces sont « en somme directe » : tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre. Ainsi il faut être dans $\mathbf{R}^4$ pour que l'orthogonal d'un plan soit un plan. Pour donner un sens à l'orthogonalité d'un sous-espace H_1 de dimension p et d'un sous-espace H_2 de dimension q de $\mathbf{R}^n$, lorsque la somme $p + q$ est différente de n, il faut :

- si $p + q < n$, supposer H_2 contenu dans l'espace $\mathrm{H}_1^{\perp}$: la propriété « tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre » est conservée (penser à deux droites de $\mathbf{R}^3$) ;
- si $p + q > n$, supposer $\mathrm{H}_1^{\perp}$ contenu dans H_2 : la propriété « tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre » n'est pas conservée (penser à deux plans de $\mathbf{R}^3$).

Dans les deux cas, il n'y a plus unicité. De toute façon, le vocabulaire devient trompeur car, si on peut dire que H_1 et H_2 sont perpendiculaires ou orthogonaux, H_2 n'est pas l'orthogonal de H_1.

Le second atelier a porté sur des développements plus récents de la notion de dimension dans deux directions : dimensions fractales et définition topologique de la dimension.

Observons d'abord qu'un disque de rayon r est d'aire πr^2, une boule de rayon r de volume $\frac{4}{3}\pi r^3$ et, plus généralement, que le volume de petites boules de rayon r dans un espace euclidien est de la forme $\mathrm{C}^{\mathrm{te}}\, r^n$.

Il y a des espaces métriques où les « boules » seront de volume de l'ordre de r^{α}. Pourquoi s'intéresser à de tels espaces ? Après avoir été considérés comme des curiosités, les systèmes dynamiques en fournissent de plus en plus d'exemples.

On peut aussi chercher à définir, pour des espaces aussi généraux que possible, la notion de dimension. L'idée de départ est d'observer qu'on peut recouvrir un segment avec des intervalles qui se touchent en une extrémité, un plan avec des rectangles qui, si on les dispose comme des briques, ne se rencontrent que trois à trois ; pour recouvrir l'espace avec de vraies briques, il faudra permettre au moins des rencontres quatre à quatre. On va donc déduire une notion de dimension de la façon dont on va pouvoir recouvrir l'espace avec des « briques » simples. Ces questions ont trouvé une réponse au début de ce siècle.

Ce type de travail, en nous ramenant aux sources, nous montre une mathématique vivante en cours d'élaboration et peut nous rendre complice de la réflexion d'un créateur tel que Grassmann. Cette approche est tout à fait éloignée de la présentation dogmatique d'une construction parfaite et définitive qu'a induit parfois un enseignement trop théorique. Elle fait des mathématiques une aventure bien insérée dans l'histoire et profondément humaine ; elle semble en effet bien adaptée à l'enseignement dans les sections littéraires, car elle établit des liens naturels avec la littérature, l'histoire et la philosophie et pourrait peut-être constituer un moyen efficace pour réconcilier avec les mathématiques des élèves à qui elles semblaient une science inhumaine et inaccessible.

Pour tous, elle peut enrichir notre enseignement en aidant des élèves à mieux appréhender certains concepts après en avoir suivi le développement.

Bibliographie

I. Documents préparés par des enseignants pour leurs élèves donnant des exemples d'exploitation en classe de textes historiques originaux

Matériaux pour l'histoire des nombres complexes. Jean Itard. APMEP, 1969.

Activités géométriques de la sixième à la terminale. IREM de Strasbourg, novembre 1984.

Textes et documents mathématiques. CRDP Poitiers, 1985.

Mathématiques : Approche par les textes historiques (groupe M.A.T.H. de l'IREM de Paris VII).
- Brochures n^{o} 61 (1986) et 79 (1990).
- Mnémosyne. Quatre parutions par an depuis 1992.

« Fiche historique » : le degré de la terre. André Deledicq. Bulletin APMEP n^{o} 363.

II. Non directement utilisables en classe, ces documents historiques et épistémologiques et commentaires de textes choisis peuvent aider à l'élaboration d'activités pour les élèves

Nombre, mesure et continu, épistémologie et histoire. Jean Dhombres. IREM de Nantes.

Groupes d'histoire des mathématiques, documents des IREM de Dijon, Poitiers, Toulouse.

La rigueur et le calcul. Groupe Inter-IREM. CEDIC/Nathan, 1982.

Mathématiques au fil des âges. Équipe coordonnée par J. Dhombres. Gauthier-Villars, janvier 1987.

Histoire de problèmes - histoire des mathématiques. Groupe Inter-IREM. Ellipses, 1994.

Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques. IREM de Besançon, 1995.

Reproduction de textes anciens. IREM de Paris VII, 1980 …

Brochures APMEP.
n^{os} 41, 65, 83, 86. Fragments d'histoire des mathématiques.
n^{o} 48. Présence d'Évariste Galois.
n^{o} 70. Trisection de l'angle.

Essai philosophique sur les probabilités. Pierre Simon Laplace. Éditeur Christian Bourgeois, 1986.