Les Problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes »… si possible, trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur invention créatrice.

Afin de réduire petit à petit le délai entre énoncés et solutions, sans gonfler démesurément la rubrique, nous ne publierons dans ce numéro que deux nouveaux énoncés pour trois solutions.

Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Énoncés et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées SVP, sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
42 quai de la Loire
75019 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ 281 (Moubinool OMARJEE, 75 - Paris)

Soit une série convergente, de terme général α_n, de somme S.
Montrer qu'il existe une suite croissante (k_n) d'entiers naturels, qui tende vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, et telle que la série de terme général $k_n\alpha_n$, soit convergente.

ÉNONCÉ 282 (Raymond PRUDHOMME, 76 - Isneauville)

Soit ABC un triangle et (Γ) son cercle circonscrit. Les bissectrices intérieures des angles A, B, C coupent (Γ) respectivement en A′, B′, C′. Les droites (B′C′), (C′A′), (A′B′) coupent respectivement les tangentes en A, B, C au cercle (Γ) en A″, B″, C″. Montrer que A″, B″ et C″ sont alignés.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ 261 (Jean-Pierre FRIEDELMEYER, 67 - Strasbourg)

Trouver tous les triangles ABC à côtés entiers a, b, c (a = BC, b = AC, c = AB) tels que la médiane issue de A soit égale à l'un des côtés contenant A.

SOLUTION de Maurice PERROT (75 - PARIS)

Si a, b, c sont les côtés d'un triangle-solution, ka, kb et kc aussi. On cherchera donc les solutions de pgcd : $(a,b,c) = 1$. Soit M le milieu de BC ; on supposera AM = AB (pour AM = AC, il suffira d'échanger b et c).
Le théorème de la médiane s'écrit :

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{AM}^2 + (\mathrm{BC}^2/2).$$

a est nécessairement pair, et si $a = 2\alpha$, $b^2 - c^2 = 2\alpha^2$. Les nombres $b + c$ et $b - c$ sont de même parité et de produit pair. Ils sont donc pairs, et on peut poser : $b + c = 2s$ et $b - c = 2d$, d'où $b = s + d$, $c = s - d$ et $2sd = \alpha^2$.
Si q divise s et d, il divise b et c et q^2 divise α^2, donc q divise a. Comme $(a,b,c) = 1$, $(s,d) = 1$.

$2sd$ est un carré, donc 2 divise s ou d (pas les deux, puisque $(s,d) = 1$).
• si $s = 2s'$, $s'd = \alpha^2/4$ est un carré et $(s',d) = 1$; donc s' et d sont des carrés. Soit : $s' = u^2$ et $d = v^2$. On a $\alpha^2 = 4u^2v^2$, d'où :

$$a = 4uv,\ b = 2u^2 + v^2,\ c = 2u^2 - v^2, \qquad (1)$$

et pour que les inégalités triangulaires $|b - c| < a < b + c$ soient satisfaites, il faut en outre que $u > v$.
• si $d = 2d'$, on obtient de même :

$$a = 4uv,\ b = v^2 + 2u^2,\ c = v^2 - 2u^2, \qquad (2)$$

sous la condition $2u < v$ (inégalités triangulaires).
Comme s et d sont premiers entre eux, u et v le sont également et v est impair (sans quoi a, b et c seraient tous trois pairs).

Réciproquement, on vérifie aisément que (1) ou (2) entraîne $(b - c)(b + c) = a^2/2$, donc : $2\mathrm{AM}^2 = b^2 + c^2 - (a^2/2) = 2c^2$, et que les conditions $u > v$ dans (1), $2u < v$ dans (2), satisfont les inégalités triangulaires.

Les triangles cherchés sont donc tous les « multiples » de ceux trouvés ci-dessus, soit : $a = 4kuv$, $\{b, c\} = \{k\cdot(2u^2+v^2), k\cdot|2u^2-v^2|\}$, $(v-u)(v-2u) > 0$, $(u,v) = 1$ et v impair

Exemples :
$v = 5$, $u = 2$, $a = 40k$, $b = 33k$, $c = 17k$
$v = 5$, $u = 7$, $a = 140k$, $b = 123k$, $c = 73k$
et la plus simple $v = 1$, $u = 2$, $a = 8k$, $b = 9k$, $c = 7k$.

AUTRES SOLUTIONS : Alain BESSON (74 - St Julien en Genevois), Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), Edgard DELPLANCHE (94 - Créteil), Alain LARROCHE (06 - Nice), René MANZONI (76 - Le Havre), Charles NOTARI (31 - Montaut), Joël PAYEN (93 - Blanc-Mesnil), David RIGAUT (06 - Nice), Pierre SAMUEL (92 - Bourg la Reine), et sept solutions incomplètes ou fausses...

REMARQUES :

Certes, il s'agissait plus d'un problème d'arithmétique que de géométrie (David RIGAUT a néanmoins étudié le lieu de C, pour A et B fixés, tels que AM = AB), mais il ne fallait pas oublier les inégalités triangulaires (principale cause d'erreur...) ! Marie-Laure CHAILLOUT remarque que, dès lors que $a^2 = 2(b^2 - c^2)$, $a < b + c$ équivaut à $|b - c| < (a/2)$. Plusieurs lecteurs signalent que, si AB = AM, le pied de la hauteur issue de A est milieu de BM. Ceci suffit à établir la condition : $c < b < 3c$ (AC < AM + MB), et peut dispenser d'utiliser le théorème de la médiane.

Les conditions : u, v premiers entre eux, v impair, ne sont plus nécessaires dans la solution finale, car si elles ne sont pas vérifiées, il suffira de changer la valeur du facteur k pour s'y ramener. Par contre, on a toujours d'une manière ou d'une autre deux cas à distinguer, soit d'après la parité de s et d (comme ci-dessus), soit d'après le signe de $2u^2 - v^2$.

Numériquement, ce problème admet de nombreuses solutions, Jacques DAUTREVAUX (en Quick-Basic 4.5) nous en livre 272 pour $a \leq 200$; parmi elles, 99 vérifient : (a,b,c) = 1 (Pierre BARNOUIN). René MANZONI (en Maple) se limite à 63 solutions classées selon u et v et non pas selon a. Mais la plus simple et la plus remarquable est bien évidemment : $(a,b,c) = (8,9,7)$. Tout le monde connaît le triangle rectangle (3,4,5), dont deux côtés sont donc des hauteurs : le triangle (7,8,9) a, lui, un côté égal à une médiane. Et le triangle (6,7,8) a un côté égal à une bissectrice intérieure ! Si l'on ajoute que le triangle (4,5,6) a un angle égal au double d'un autre, on peut se demander quelles propriétés remarquables vérifient les triangles (2,3,4), (5,6,7), (8,9,10)... Notons également qu'une médiane peut être égale au côté opposé, comme dans le triangle (26,27,29).

Si l'on suppose connu que l'anneau $\mathbf{Z}\left[i\sqrt{2}\right]$ est euclidien, on remarque que, dans cet anneau, $b^2 = c^2 + 2\alpha^2 = \left(c + i\alpha\sqrt{2}\right)\left(c - i\alpha\sqrt{2}\right)$ admet une décomposition unique en facteurs premiers, aux unités près (les seules unités étant +1 et −1), donc qu'il existe $v + iu\sqrt{2}$ tel que : $c + i\alpha\sqrt{2} = \pm\left(v + iu\sqrt{2}\right)^2$ et $b = \left(v + iu\sqrt{2}\right)\left(v - iu\sqrt{2}\right)$. Cette démonstration semble plus rapide, mais elle repose essentiellement sur la propriété assez exceptionnelle de l'anneau $\mathbf{Z}\left[i\sqrt{2}\right]$ d'être euclidien, elle n'est donc guère généralisable.

Pour conclure, il existe toutes sortes de généralisations du problème. Edgard DELPLANCHE recherche tous les triangles pour lesquels la médiane vérifie d'autres conditions de ce genre, et Alain BESSON étudie les parallélogrammes et les trapèzes dont les côtés et les diagonales sont tous entiers. Existe-t-il des pentagones dont tous les côtés et toutes les diagonales sont entiers ?

ÉNONCÉ 262 (Raymond RAYNAUD, 04 - Digne)

Dans le plan P, les quatre points A, B, A′, B′ sont les sommets d'un trapèze isocèle. [AB] et [A′B′] ont la même médiatrice et des longueurs différentes. Trouver l'ensemble E des points M de P tels que MA / MA′ ≤ MB / MB′.

SOLUTION de Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles)

On appelle P_A et P_B les demi-plans fermés limités par la médiatrice (Δ) de [AB] contenant respectivement les points A et B.

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel les points A, B, A′, B′ et M ont pour coordonnées : A $(-\alpha, \beta)$, B (α, β), A′ $(-\alpha', 0)$, B′ $(\alpha', 0)$, M (x, y), avec $\alpha > 0$ et $|\alpha| \neq |\alpha'|$.

$$\mathrm{MA} / \mathrm{MA}' \leq \mathrm{MB} / \mathrm{MB}' \Leftrightarrow \mathrm{MB}^2\mathrm{MA}'^2 - \mathrm{MA}^2\mathrm{MB}'^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(\alpha' - \alpha)\left[x^2 + \left(y - \frac{\beta\alpha'}{\alpha' - \alpha}\right)^2 - \alpha\alpha'\left(\frac{\beta^2 + (\alpha' - \alpha)^2}{(\alpha' - \alpha)^2}\right)\right] \geq 0 \qquad (1)$$

• si B′ ∈ P_A, alors $\alpha\alpha' < 0$ donc la relation (1) équivaut à $x \leq 0$, d'où $E = P_A$.

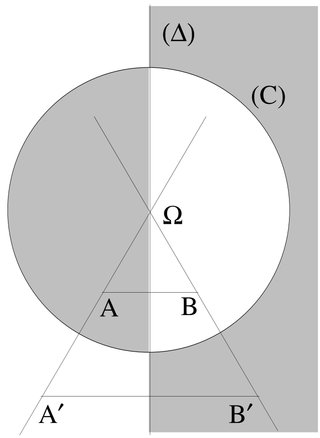
• si $B' \in P_B$, alors la courbe (C) d'équation :

$$x^2 + \left(y - \frac{\beta\alpha'}{\alpha' - \alpha}\right)^2 - \alpha\alpha'\left(\frac{\beta^2 + (\alpha' - \alpha)^2}{(\alpha' - \alpha)^2}\right) = 0$$

est un cercle de centre $\Omega\left(0, \dfrac{\beta\alpha'}{\alpha' - \alpha}\right)$ et de rayon :

$$R = \frac{\sqrt{\alpha\alpha'\left(\beta^2 + (\alpha' - \alpha)^2\right)}}{|\alpha' - \alpha|}.$$

Ω est le point de concours des droites (AA′), (BB′) et (Δ), et $R^2 = \Omega B.\Omega B' = \Omega A.\Omega A'$, donc (C) est le cercle de centre Ω orthogonal au cercle circonscrit au trapèze.



Soient D et $\overline{D}$ les disques respectivement ouverts et fermés limités par le cercle (C).

• Si A′B′ > AB, alors $\alpha' - \alpha > 0$, donc la relation (1) équivaut à :

$$x \cdot [x^2 + (y - y_\Omega)^2 - R^2] \geq 0$$

et $E = (P_A \cap \overline{D}) \cup (P_B \cap \complement_P D)$

• Si A′B′ < AB, alors $\alpha' - \alpha < 0$, donc la relation (1) équivaut à :

$$x \cdot [x^2 + (y - y_\Omega)^2 - R^2] \leq 0$$

et $E = (P_A \cap \complement_P D) \cup (P_B \cap \overline{D})$

AUTRES SOLUTIONS : Alain BESSON (74 - St Julien en Genevois), Hélène BRION (92 - Clamart), Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), Edgard DELPLANCHE (94 - Créteil), René MANZONI (76 - Le Havre), A. MARCOUT (10 - Ste Savine), Joël PAYEN (93 - Blanc-Mesnil), Maurice PERROT (75 - Paris), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Pierre RENFER (67 - Ostwald), Olivier ROUSTANT (69 - Lyon).

REMARQUES :

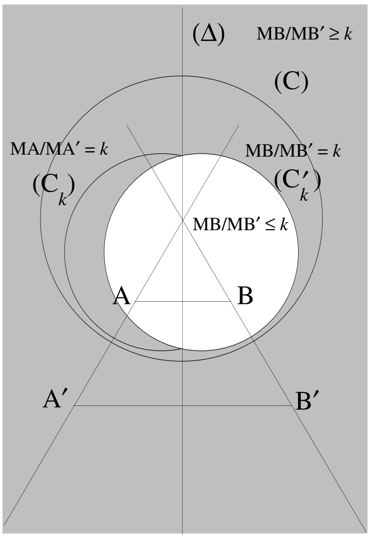
40% des lecteurs n'ont pas traité le cas, géométriquement trivial, où A et A′ sont de part et d'autre de la médiatrice (Δ) : comme on a, dans ce cas, d'un côté de la médiatrice MA < MB et MB′ < MA′, et de l'autre MA > MB et MB′ > MA′, il est clair que, d'un côté de la médiatrice, MA·MB′ < MB·MA′, et, de l'autre, MA·MB′ > MB·MA′.

Mais la principale question est : pouvait-on se dispenser du calcul analytique ? Hélène BRION utilise un plan complexe centré en Ω, Edgard DELPLANCHE fait appel à la propriété métrique de l'inversion (transformant le cercle circonscrit au trapèze en la droite (AB)), mais les calculs qui en résultent sont néanmoins du même genre.

C'est A. MARCOUT qui signale l'argument de continuité : la fonction f(M) = (MA/MA′) − (MB/MB′) étant continue, elle ne change de signe que là où elle s'annule. Or, comme le fait remarquer l'auteur du problème, la recherche des points où MA/MA′ = MB/MB′ peut conduire à une faute de raisonnement. Pour k donné, MA/MA′ = k est vérifiée sur un cercle, MB/MB′ = k sur un autre cercle. Ces deux cercles, symétriques par rapport à (Δ), se coupent sur (Δ), si bien que MA/MA′ = k = MB/MB′ ne peut être vérifiée que sur (Δ)… à moins que les deux cercles ne soient confondus ! C'est ce fameux cercle (C) qui est orthogonal non seulement au cercle circonscrit au trapèze, mais aussi à tout cercle passant par A et A′ et à tout cercle passant par B et B′… Le lieu des points où l'égalité est vérifiée est donc la réunion du cercle (C) et de la droite (Δ), qui partitionnent le plan en quatre domaines ; il suffit de prendre un point dans chaque domaine (en l'occurrence : A, B, A′ et B′) pour savoir où l'inégalité est vérifiée.

Plusieurs lecteurs (Hélène BRION, Jacques DAUTREVAUX…) ont trouvé une interprétation géométrique du résultat.

L'ensemble cherché est la réunion, pour tous les k réels positifs, des ensembles définis par : MA/MA′= k et MB/MB′ ≥ k. MA/MA′ = k est vérifiée sur un cercle (C_k), et MB/MB′ = k sur un autre cercle (C'_k). Mais MB/MB′ ≥ k est vérifiée soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de (C'_k) suivant que k < 1 (B′ extérieur à (C'_k)) ou k > 1 (B′ intérieur à (C'_k)). Les deux cercles (C_k) et (C'_k) se coupent sur (Δ), mais l'arc de (C_k) intérieur à (C'_k) est soit



d'un côté de (Δ), soit de l'autre, suivant la position de (C_k) par rapport à (C) et à la médiatrice de [AA′]. En faisant varier k de 0 à l'infini, on obtiendra une réunion d'arcs de cercle qui seront tantôt intérieurs à (C) et d'un côté de (Δ), tantôt extérieurs à (C) et de l'autre côté de (Δ), d'où le résultat.

ÉNONCÉ 263 (Philippe DELEHAM, 97 - Ouanjani)

Soit $f(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n}{2}}}$ (n entier). Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n\cdot 2^n} = \frac{\pi}{4}$.

SOLUTION de Pierre RENFER (67 - Ostwald)

On remarque que $f(n) = \operatorname{Im}\left(\mathrm{i}^n + \frac{\alpha^n}{2^{\frac{n}{2}}}\right)$, où $\alpha = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n\cdot 2^n} = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n\right) + \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{2^{\frac{3}{2}}}\right)^n\right)$$

$$= -\operatorname{Im}\left(\ln\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right) - \operatorname{Im}\left(\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\text{car } \left|\frac{i}{2}\right| < 1 \text{ et } \left|\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\right| < 1$$

$$= -\operatorname{Im}\left(\ln\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right) - \operatorname{Im}\left(\ln\left(\frac{3}{4} - \frac{\mathrm{i}}{4}\right)\right)$$

$$= \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(d'après la classique formule de Machin).

AUTRES SOLUTIONS : Richard ANDRÉ-JEANNIN (54 - Longwy), Christophe BRIGHI (57 - Thionville), Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Michel LAFOND (21 - Dijon), René MANZONI (76 - Le Havre), Alain NEVADO (81 - Castres), Charles NOTARI (31 - Montaut), Joël PAYEN (93 - Blanc-Mesnil), Laurent PECQUEUX (59 - Le Cateau

Cambresis), Maurice PERROT (75 - Paris), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Alain SEBAOUN (78 - Versailles).

REMARQUES :

Comme $\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{\mathrm{i}}{4}\right)=\frac{5}{8}\cdot(1-\mathrm{i})$, on voit qu'en remplaçant les sinus par des cosinus, donc en posant $g(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{2^{\frac{n}{2}}}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{g(n)}{n\cdot 2^n}=-\mathrm{Re}\left(\ln\left(\frac{5}{8}\cdot(1-\mathrm{i})\right)\right)=\ln\left(\frac{8}{5\sqrt{2}}\right).$$

Alain SEBAOUN calcule plus généralement

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n\cdot a^n}=-\ln\sqrt{1+\frac{1}{a^2}-\frac{2\cos\theta}{a}}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n\cdot a^n}=\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{a+1}{a-1}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

et Marie-Laure CHAILLOUT s'intéresse à l'équation :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a^n\cdot\sin(n\theta)}{n}+\frac{b^n\cdot\sin(2n\theta)}{n}\right)=\theta\ .$$

Il existe a et b vérifiant cette équation si et seulement si :

$$|\theta|\in\left]0,\frac{2\pi}{5}\right]\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{5}\right]$$

et l'on doit avoir :

$$|a|\leq 1, |b|\leq 1 \text{ et } a=\frac{b+1-4b\cos^2\theta}{2\cos\theta\left(2b+1-4b\cos^2\theta\right)}.$$

Pour $\theta=\frac{\pi}{4}$, le couple $a=\frac{1}{2\sqrt{2}}, b=\frac{1}{2}$ est donc l'un des nombreux couples qui conviennent, ce qui, entre autres choses, fournit une solution du problème posé.