Les Problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes »... si possible, trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur invention créatrice.

L'énoncé 260 ci-dessous, particulièrement copieux, va permettre d'expérimenter un nouveau type de complémentarité entre le serveur de l'APMEP et le présent bulletin ; nous ne publions ici qu'un rapide résumé des centaines de pages de notes que j'ai collectées sur ce problème. Et pour ne pas trop accroître le délai entre énoncés et solutions, nous sommes aussi amenés à ne publier que deux nouveaux énoncés dans ce numéro.

Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Énoncés et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées SVP, sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
42 quai de la Loire
75019 PARIS

ÉNONCÉ 279 (Françoise PÉCAUT, 84 - Avignon)

Démontrer qu'un quadrilatère plan articulé de côtés a, b, c, d donnés atteint son maximum d'aire quand il est inscriptible dans un cercle.

ÉNONCÉ 280 (Dominique ROUX, 87 - LIMOGES)

Soit S l'ensemble des entiers $k \geq 2$ tels qu'il existe k entiers consécutifs, $(n+1)$, $(n+2)$, ..., $(n+k)$, $n \geq 0$ dont la somme des carrés soit un carré parfait :

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+k)^2 = m^2 .$$

a) Montrer que l'ensemble S est infini, et qu'il existe une infinité d'entiers qui n'appartiennent pas à S.

b) Montrer qu'il existe des entiers $k \in S$ tels que l'équation :

$$(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(n+k)^2=m^2$$

admette une infinité de couples solutions (n,m), et qu'il existe d'autres entiers $k \in S$ tels que cette même équation n'admette qu'un nombre fini de solutions.

ÉNONCÉ 260

(François LO JACOMO, Paris, et Jacqnes BOUTELOUP, Rouen)

Soient M un point du plan d'un triangle ABC, P, Q, R les intersections (AM,BC), (BM,CA), (CM,AB), P′, Q′, R′ les conjugués respectifs de P, Q, R par rapport à (B,C), (C,A), (A,B). L'application des théorèmes de Ménélaüs et de Céva montre que P′, Q′, R′ sont alignés sur une droite D(M), appelée *polaire trilinéaire* de M. Étudier l'ensemble des points M tels que D(M) soit perpendiculaire à (OM), O étant le centre du cercle circonscrit à ABC. En appelant (Γ) cet ensemble, on s'intéressera notamment aux points remarquables appartenant à (Γ) : comment se répartissent ces points remarquables sur les différentes branches de la courbe ?

SOLUTION

C'est peut-être la plus belle cubique définie géométriquement à partir d'un triangle, car non seulement c'est vraisemblablement la seule (cela reste à prouver) qui coupe en seulement 17 points (au lieu de 66) les 22 droites les plus remarquables du triangle (les trois côtés, les six bissectrices, les trois médianes, les trois hauteurs, les trois médiatrices, les trois symédianes et la droite d'Euler) - 17 points remarquables : les trois sommets A, B, C, les centres I, I_A, I_B, I_C des cercles inscrit et exinscrits, le centre de gravité G, les milieux A′, B′, C′ des côtés [BC], [CA], [AB], le centre du cercle circonscrit O, l'orthocentre H, les milieux des hauteurs, que nous appellerons O_A, O_B, O_C, et le point de Lemoine K, intersection des symédianes -, mais, en outre, elle définit sur cet ensemble une structure rendant évidentes certaines relations de concourance et de positionnement, comme le fait que les quatre droites (IK), (I_AA'), (I_BB') et (I_CC') sont concourantes ou que I est nécessairement intérieur au triangle GOK.

J'ai reçu des réponses de Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), Edgard DELPLANCHE (94 - Créteil), René MANZONI (76 - Le Havre), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), Pierre RENFER (67 - Ostwald) et surtout Jacques BOUTELOUP (76 - Rouen) dont les connaissances sur les cubiques m'ont été précieuses et Philippe DELEHAM (97 - Mayotte) qui est revenu de nombreuses fois sur l'étude de cette cubique : plusieurs dizaines de lettres ont été échangées entre Jacques BOUTELOUP, Philippe DELEHAM et moi-même à ce sujet. Je remercie également Michel GUILLEMOT (31 - Toulouse) et Robert FERRÉOL (75 - Paris) pour les photocopies d'articles qu'ils m'ont fait parvenir. Cette courbe est en effet citée comme cubique des 17 points dans l'ouvrage *Courbes géométriques remarquables*, de H. Brocard et T. Lemoyne (tome III, p. 129 : Paris, Albert Blanchard, 1970), et a été étudiée plusieurs fois il y a un peu plus d'un siècle (Philippe DELEHAM pense qu'elle a été trouvée entre 1875 et 1885 par Lemoine ou Gohierre de Longchamps. On en parle dans le *Journal de mathématiques spéciales*, 1886 (M. Koehler) ; 1889, p. 85 (Émile Vicarié) ; 1889, p. 265 (Auguste Boutin) ; au *Congrès d'Oran*, 1888 (M. Lemoine)). Mais, pour ne pas accaparer trop de place dans le *Bulletin*, par décision du Comité de Rédaction, je me limiterai à énumérer ici sans démonstration quelques-unes des principales propriétés de la cubique (Γ), en prévision d'une étude plus complète sur le serveur de l'APM.

L'ensemble cherché est donc une cubique d'équation barycentrique (en posant $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$) :

$$a^2yz(y-z)+b^2zx(z-x)+c^2xy(x-y)=0 .$$

Elle passe par les 17 points énumérés ci-dessus, sous réserve que la propriété géométrique définitoire n'a pas de sens pour A, B, C, O et G, qui doivent logiquement être exclus de l'ensemble solution (Marguerite PONCHAUX). H a pour polaire trilinéaire l'axe orthique du triangle, soit l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle d'Euler, qui est donc perpendiculaire à la droite d'Euler. La polaire trilinéaire de I, droite joignant les pieds des bissectrices extérieures, donc axe orthique de $I_AI_BI_C$, est perpendiculaire à (OI) ; A', B' et C' admettent les côtés pour polaire trilinéaire et K est le seul point du plan ayant pour polaire trilinéaire sa polaire par rapport au cercle circonscrit.

Toutes les cubiques passant par A, B, C, A', B', C', G et O passent par K, mais (Γ) est la seule cubique distincte de l'ensemble (BC, CA, AB), passant par A, B, C, A', B', C' et invariante par isogonalité. Les tangentes en I, I_A, I_B, I_C sont (IG), (I_AG), (I_BG), (I_CG), les tangentes en A, B, C, G sont (AK), (BK), (CK), (GK), les tangentes en A', B', C', K sont (OA'), (OB'), (OC'), (OK). En appelant *tangentiel* du point M d'une cubique le point où la tangente en M recoupe la cubique, les points O, O_A, O_B, O_C ont pour tangentiel commun le point O' de coordonnées barycentriques :

$$\left(\frac{\cos\hat{A}}{\cos\hat{A}-\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}},\frac{\cos\hat{B}}{\cos\hat{B}-\cos\hat{C}\cdot\cos\hat{A}},\frac{\cos\hat{C}}{\cos\hat{C}-\cos\hat{A}\cdot\cos\hat{B}}\right).$$

Le point H et ses « équitangentiels » H_A, H_B, H_C, isogonaux de O_A, O_B, O_C ($H_A = (AO)\cap(GO_A) = (BO_C)\cap(CO_B)$ ayant pour coordonnées barycentriques $(a.\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}, b\cdot\cos\hat{B}, c\cdot\cos\hat{C})$) ont pour tangentiel commun le point H′ de coordonnées barycentriques :

$$\left(\frac{\sin^2\hat{A}\cdot\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}-2\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}}{\cos\hat{A}-\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}},\right.$$

$$\left.\frac{\sin^2\hat{B}\cdot\sin\hat{C}\cdot\sin\hat{A}-2\cos\hat{C}\cdot\cos\hat{A}}{\cos\hat{B}-\cos\hat{C}\cdot\cos\hat{A}},\frac{\sin^2\hat{C}\cdot\sin\hat{A}\cdot\sin\hat{B}-2\cos\hat{A}\cdot\cos\hat{B}}{\cos\hat{C}-\cos\hat{A}\cdot\cos\hat{B}}\right)$$

(Γ) est l'ensemble des points M alignés avec G et leur isogonal M′, ce qui l'inclut dans la famille des cubiques de Neuberg (1922 - 1924), Ω-isogonales (lieu des points alignés avec Ω et leur isogonal) ou Ω- isotomiques (lieu des points alignés avec Ω et leur isotomique), qu'Auguste Boutin étudiait en 1889 sous le nom « cubique des inverses ou cubique des réciproques, relative au point Ω ». Toute cubique passant par A, B, C, I, I_A, I_B, I_C est Ω-isogonale, Ω étant le point de concours des tangentes en I, I_A, I_B, I_C. Celles dont le point Ω est sur la droite d'Euler passent en outre par O et H : parmi elles, la cubique de Darboux (Ω symétrique de H par rapport à O), qui admet O pour centre de symétrie (et donc pour point d'inflexion) et les trois médiatrices (OA′), (OB′), (OC′) pour asymptotes. Cette cubique de Darboux (lieu des points M dont les projections orthogonales M_1, M_2, M_3 sur (BC), (CA), (AB) sont telles que (AM_1), (BM_2), (CM_3) soient concourantes) est associée à la cubique de Lucas (lieu des intersections de (AM_1), (BM_2) et (CM_3), signalée par Gréer dès 1865) par une fonction *f* étudiée longuement dans *Quadrature* n^{os} 9 - 10 - 11 (feuilleton Paillettes, « Deux cubiques du plan d'un triangle... », d'après F. Lang). La cubique de Lucas est d'ailleurs la transformée de notre cubique (Γ) par l'homothétie de centre G et de rapport -2 (Philippe DELEHAM), et elle est Ω-isotomique, avec pour point Ω l'image de K par cette homothétie.

(Γ) peut également être définie comme l'ensemble des points M tels que

$$\frac{\overline{M_1A'}}{\overline{M_1M}}+\frac{\overline{M_2B'}}{\overline{M_2M}}+\frac{\overline{M_3C'}}{\overline{M_3M}}=0$$

(en orientant de manière cohérente les côtés et les perpendiculaires aux côtés, M_1, M_2 et M_3 étant toujours les projectious orthogonales de M sur les côtés du triangle ABC) ou bien comme l'ensemble des points M tels que, si (MA′), (MB′) et (MC′) coupent en M_1', M_2', M_3' les parallèles par I à (BC), (CA), (AB), les droites ($A M_1'$), ($B M_2'$), ($C M_3'$) soient concourantes : le lieu des intersections est alors une cubique Ω-isotomique avec, pour point Ω, l'isotomique de I. Ceci se généralise, par exemple, en remplaçant I par I_A, I_B ou I_C.

La cubique (Γ) admet trois asymptotes qui, en général, ne sont pas concourantes : elles coupent la cubique en trois points alignés situés tous trois entre G et K. (Γ) n'admet donc pas de centre de symétrie. Dans le cas, toutefois, où le triangle est isocèle, elle est décomposée en l'axe du triangle et une hyperbole, et en les trois axes du triangle si celui-ci est équilatéral. Parmi ses trois points d'inflexion (alignés), l'un est situé entre G et I, et si le triangle est rectangle, O = A′ est l'un des deux autres. Sur la branche principale (qui admet une seule direction asymptotique) se trouvent deux familles de points : O, G, I, K, H d'une part et, si $\hat{A}$ est le plus grand des trois angles du triangle, I_A, A′, O_A, A d'autre part, alors que les branches hyperboliques contiennent l'une I_B, B′, O_C, C, l'autre I_C, C′, O_B, B. C'est d'ailleurs en cherchant à prouver que O et H appartiennent toujours à la branche principale (par l'étude des tangentes issues de A) que je suis tombé sur l'inégalité qui a fait l'objet de l'énoncé 255.

La loi de composition interne classique qui, ici, associe à deux points M et N l'isogonal P′ = M + N de la troisième intersection P de la droite (MN) avec la cubique, définit sur (Γ) une structure de groupe commutatif d'élément neutre G. {G, A, B, C} est un sous-groupe (que j'appellerai γ) isomorphe au groupe de Klein, et intéressant eu égard à l'avis de recherche n° 61 de Robert FERRÉOL (cf *Bulletin* n° 407, décembre 1996, p. 738) : les trois points A, B, C n'ont pas vraiment des statuts symétriques dans la mesure où un seul d'entre eux appartient à la branche principale de la cubique, sauf si l'on fait abstraction de cette cubique ou si l'on suppose le triangle équilatéral.

Deux points ont même tangentiel si et seulement si leur différence appartient à γ. La branche principale de la cubique constitue un sous-groupe isomorphe au groupe quotient (Γ)/γ, bien que ce groupe quotient soit représenté par deux points de ladite branche principale (deux points ayant même tangentiel, les deux autres points étant sur les branches hyperboliques, éventuellement sur la même puisque les points à l'infini n'ont pas même tangentiel) : ce groupe quotient est en fait isomorphe à **R/Z**. En d'autres termes, tout point peut être paramétré par un réel t (modulo une période 2τ) et un élément $q \in \gamma$ de sorte que les paramètres de la somme soient la somme des paramètres :

$$(t_1, q_1) + (t_2, q_2) = (t_1 + t_2 (\operatorname{mod} 2\tau), q_1 + q_2).$$

En attribuant à I les paramètres (1,G), et en appelant $t \cdot \mathrm{I}$, $t \cdot \mathrm{I} + \mathrm{A}$, $t \cdot \mathrm{I} + \mathrm{B}$, $t \cdot \mathrm{I} + \mathrm{C}$ les points de paramètres (t,G), (t,A), (t,B), (t,C), on voit que :

$\mathrm{O} = -2 \cdot \mathrm{I}$,	$\mathrm{O_A} = -2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{A}$,	$\mathrm{O_B} = -2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{B}$,	$\mathrm{O_C} = -2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{C}$,
$\mathrm{G} = 0$,	$\mathrm{A} = \mathrm{A}$,	$\mathrm{B} = \mathrm{B}$,	$\mathrm{C} = \mathrm{C}$,
$\mathrm{I} = \mathrm{I}$,	$\mathrm{I_A} = \mathrm{I} + \mathrm{A}$,	$\mathrm{I_B} = \mathrm{I} + \mathrm{B}$,	$\mathrm{I_C} = \mathrm{I} + \mathrm{C}$,
$\mathrm{K} = 2 \cdot \mathrm{I}$,	$\mathrm{A}' = 2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{A}$,	$\mathrm{B}' = 2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{B}$,	$\mathrm{C}' = 2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{C}$

et $\mathrm{H} = 4 \cdot \mathrm{I}$.

L'isogonal de $t \cdot \mathrm{I} + q$ est $(2 - t) \cdot \mathrm{I} + q$; donc si M et M′ sont isogonaux, il en va de même de M + A et M′ + A, M + B et M′ + B, M + C et M′ + C. Le tangentiel de $t \cdot \mathrm{I} + q$ est $(2 - 2t) \cdot \mathrm{I} + q$ et surtout : trois points $t_1 \cdot \mathrm{I} + q_1$, $t_2 \cdot \mathrm{I} + q_2$ et $t_3 \cdot \mathrm{I} + q_3$ sont alignés si et seulement si

$$t_1 + t_2 + t_3 = 2\ (\operatorname{mod} 2\tau)$$

et

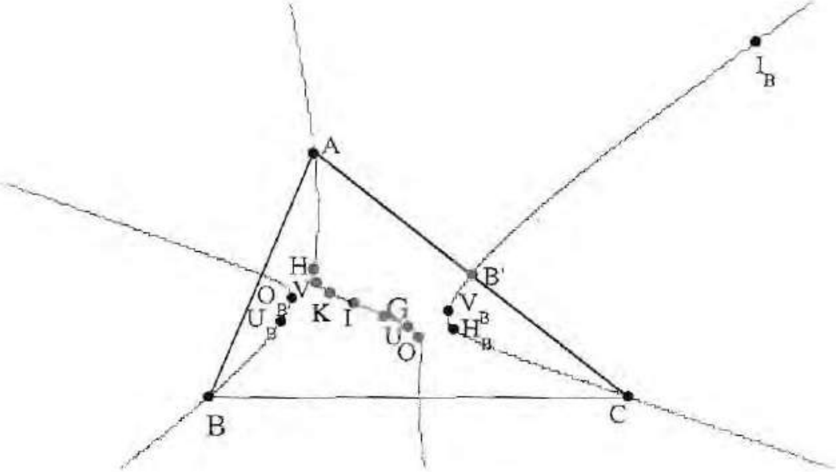
$$q_1 + q_2 + q_3 = 0\ (= \mathrm{G}),$$

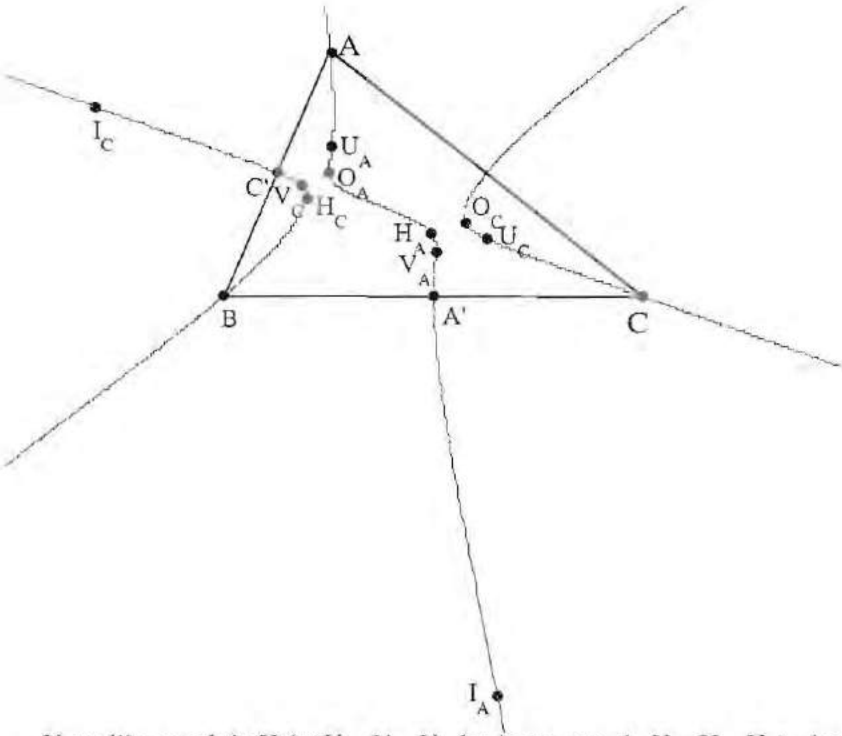
ce qui fournit une multitude de relations d'alignement : deux points ont des paramètres opposés s'ils sont alignés avec K (si les coordonnés barycentriques de l'un sont (x,y,z), l'autre a pour coordonnées $(x(-x+y+z), y(x-y+z), z(x+y-z))$ car ils sont isotomiques par rapport au triangle A′B′C′, propriété de la cubique de Lucas); si quatre points ont même tangentiel T, leurs isogonaux ont même tangentiel T′, et T, T′, K étant alignés, etc…

Quant au positionnement, si $\mathrm{M_1} = t_1 \cdot \mathrm{I}$, $\mathrm{M_2} = t_2 \cdot \mathrm{I}$ et $\mathrm{M} = t \cdot \mathrm{I}$ appartiennent au même intervalle $[u \cdot \mathrm{I}, v \cdot \mathrm{I}]$ ne contenant pas de point à l'infini (ce qui est le cas de $[-2 \cdot \mathrm{I}, 4 \cdot \mathrm{I}]$: τ est toujours strictement supérieur à 3), et si la droite $(\mathrm{M_1M_2})$ recoupe la cubique en un point $\mathrm{M_3} = t_3 \cdot \mathrm{I}$ avec $u \le t_3 \le v$ ($t_3 = 2 - t_1 - t_2$ mod. 2τ), alors la position de M par rapport à la droite $(\mathrm{M_1M_2})$ est caractérisée par le signe de $(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$. On voit ainsi, par exemple, que G et I sont du même côté de (OK), O et I du même côté de (GK), I et K du même côté de (GO), de sorte que, quel que soit le triangle ABC, I est intérieur au triangle GOK.

Par ailleurs, le point A coïncide avec le point $\tau \cdot I$, sous réserve que la valeur de τ dépende du triangle. Lorsqu'elle est irrationnelle, le sous- groupe engendré par I est infini (d'où une infinité de points sinon remarquables, du moins susceptibles d'être remarqués), mais si le triangle est rectangle, $\tau = 4$ (donc A = H, O = A', K = O_A), Si $\cos \hat{A} = \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}$, $\tau = 6$ (donc H = O_A, H et O ont même tangentiel A), etc...

Parmi ces nouveaux points multiples de I ne figurant pas dans notre liste initiale, deux sont véritablement remarquables, et ont été longuement étudiés par Philippe DELEHAM : U = –I et V = 3·I, de coordonnées barycentriques (en notant classiquement p le demi-périmètre, r_A, r_B, r_C les rayons des cercles exinscrits) : U $(a(p-a), b(p-b), c(p-c))$ et V (ar_A, br_B, cr_C). U, G, I, K et V sont les seuls multiples de I qui soient toujours intérieurs au triangle, O et H étant les seuls autres multiples de I qui ne soient jamais à l'infini. U est, d'après ce qui précède, l'intersection de (IK) avec (I_AA'), (I_BB') et (I_CC') : c'est donc le point de Lemoine du triangle $I_AI_BI_C$. Les parallélogrammes formés en menant par U des parallèles aux côtés du triangle ABC ont même périmètre. U a pour tangentiel H, ses équitangentiels $U_A = U + A = (I_AK) \cap (IA') = (I_BC') \cap (I_CB')$, U_B et U_C ayant pour coordonnées : U_A $(ap, b(p-c), c(p-b))$, etc...





V est l'isogonal de U (et V_A, V_B, V_C les isogonaux de U_A, U_B, U_C) : les droites (OI), (O_AI_A), (O_BI_B), (O_CI_C) sont donc concourantes en V. La droite (UV) passe par G, mais elle passe également par le point de Gergonne J du triangle ABC. Rappelons que, si l'on appelle J_1, J_2, J_3 les points de contact du cercle inscrit avec les côtés (BC), (CA), (AB) du triangle, J est l'intersection des trois droites (AJ_1), (BJ_2), (CJ_3). U est l'image de J par l'homothétie de centre G et de rapport -1/2 qui transforme la cubique de Lucas en notre cubique (Γ) (résultat généralisable aux autres points de Gergonne, l'image des points de Nagel par cette même homothétie étant I, I_A, I_B, I_C), mais U est aussi l'image de J par l'homothétie de centre V et de rapport $2R/r$ qui transforme le triangle $J_1J_2J_3$ en $I_AI_BI_C$: J est donc le point de Lemoine de $J_1J_2J_3$.

U est le centre de la conique tangente en A, B, C aux bissectrices extérieures, ainsi que de celle tangente aux côtés en J'_1, J'_2, J'_3 (symétriques de J_1, J_2, J_3 par rapport à A', B', C' respectivement), cette dernière passant par le point de Feuerbach. Les projections orthogonales de U et V sur les côtés du triangle ABC sont sur un même cercle passant par le point de Feuerbach, et U appartient à l'hyperbole de Feuerbach (qui contient en outre H, I, J et le point de Nagel). U est également le sixième point d'intersection de la cubique (Γ) avec l'hyperbole équilatère d'équation barycentrique :

$$x^2bc(b-c)+y^2ca(c-a)+z^2ab(a-b)=0$$

(obtenue en échangeant (a, b, c) et (x, y, z) dans l'équation de la cubique (Γ)) qui est tangente en I à (IG), donc à (Γ), et passe par I_A, I_B et I_C : cette dernière hyperbole est l'image par l'inversion triangulaire relativement au triangle $I_AI_BI_C$ de la droite d'Euler (OI) de $I_AI_BI_C$ et, lorsque $a > b > c$, son centre ω, de coordonnées barycentriques $(a(a-b)(a-c), b(b-c)(b-a), c(c-a)(c-b))$ est le seul point du cercle circonscrit à ABC qui vérifie :

$$\omega B = \omega A + \omega C.$$

Le cas particulier du triangle isocèle mérite d'être approfondi. La cubique dégénère alors en l'axe du triangle et une hyperbole. Si $a = b > c$, l'hyperbole coupe l'axe (GC) en deux points doubles D_1 et D_2 : la cubique n'a plus de branche principale, mais quatre segments $[D_1D_2]$ passant l'un par G (segment de droite, que j'appellerai Δ_G), les autres (que j'appellerai Δ_A, Δ_B, Δ_C) respectivement par A, B, C, et le point à l'infini correspondant. Tous les points $t\cdot I$ sont sur Δ_G, tous les points $t\cdot I + A$ sur Δ_A, $t\cdot I + B$ sur Δ_B, $t\cdot I + C$ sur Δ_C, donc τ est infini. Plus précisément, si l'on pose $r = 1+\sqrt{1-4\cos^2\hat{A}}$, $r' = 1-\sqrt{1-4\cos^2\hat{A}}$ et $\alpha = \sqrt{\dfrac{r'}{r}} = \dfrac{1-\sqrt{1-4\cos^2\hat{A}}}{2\cos\hat{A}}$, les points doubles (éléments absorbants de notre loi de composition) ont pour coordonnées barycentriques $(1, 1, r)$ et $(1, 1, r')$, et les points $t\cdot I$, $t\cdot I + A$, $t\cdot I + B$, $t\cdot I + C$ respectivement

$$(\alpha^t+1, \alpha^t+1, r\alpha^t+r'),$$

$$\left(\frac{r\alpha^t-r'}{\alpha^t-1}, \frac{r\alpha^t+r'}{\alpha^t+1}, rr'\right),$$

$$\left(\frac{r\alpha^t+r'}{\alpha^t+1}, \frac{r\alpha^t-r'}{\alpha^t-1}, rr'\right)$$

et

$$(\alpha^t-1, \alpha^t-1, r\alpha^t-r').$$

Si, maintenant, le triangle devient équilatéral, les deux points doubles se réunissent au centre du triangle et tous les points $t \cdot I$ sont confondus en ce centre, les points $t \cdot I + A$, $t \cdot I + B$, $t \cdot I + C$ ayant pour coordonnées barycentriques respectivement $(t-2,t,t)$, $(t,t-2,t)$ et $(t,t,t-2)$. Si, au contraire, le triangle cesse d'être isocèle, suivant que l'on a $a > b > c$ ou $b > a > c$, ce seront dans le premier cas les segments Δ_A et Δ_G (dans le second cas, les segments Δ_B et Δ_G) qui resteront collés pour former la branche principale (τ ne sera plus infini), les deux autres segments restant collés pour former les branches hyperboliques. Cela fait comprendre pourquoi chacune des branches hyperboliques contient des points $t \cdot I + B$ et des points $t \cdot I + C$ lorsque $a > b > c$ (voir figures).

D'autre part, si $a > b = c$, l'hyperbole ne coupe pas l'axe (GA) et, en posant $\cos 2u = \dfrac{1}{2\cos\hat{B}}$, les coordonnées barycentriques de $t \cdot I$, $t \cdot I + A$, $t \cdot I + B$, $t \cdot I + C$ sont respectivement :

$$(2\cos\hat{B} \cdot \cos(t-2)u, \cos tu, \cos tu),$$

$$(2\cos\hat{B} \cdot \sin(t-2)u, \sin tu, \sin tu),$$

$$(\sin tu \cdot \cos tu, \sin(t-2)u \cdot \cos tu, \sin tu \cdot \cos(t-2)u),$$

$$(\sin tu \cdot \cos tu, \sin tu \cdot \cos(t-2)u, \sin(t-2)u \cdot \cos tu).$$

Dans ce cas particulier, on a $\tau = \dfrac{\pi}{2u}$, soit $2\cos\hat{B} \cdot \cos\dfrac{\pi}{\tau} = 1$, mais le calcul de τ dans le cas général doit faire appel aux fonctions elliptiques, je n'ai pas eu le temps d'approfondir. On trouve toutefois des conditions pour que τ soit entier : par exemple, $\tau = 5$ si U = HA ou UA = H, donc si

$$p-a = (p-b)\cos\hat{C} = (p-c)\cos\hat{B} = p\cos\hat{A},$$

$\tau = 8$ si H′ = A′, soit

$$\sin^2\hat{A} \cdot \sin\hat{B} \cdot \sin\hat{C} = 2\cos\hat{B} \cdot \cos\hat{C}.$$

Je n'ai plus ni la place, ni le temps d'en dire davantage ici, mais un texte démontrant les résnltats ci-dessus et répondant peut-être à des questions non encore résolues devrait être accessible prochainement sur le serveur de l'A.P.M. J'espère que vous serez nombreux à le consulter. Ce texte ne sera d'ailleurs pas figé, ce qui permettra d'enrichir ce problème de toutes les remarques et compléments que vous pourrez proposer... et dont je vous remercie à l'avance.