Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune, et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS.
par internet : rferreol@club-internet.fr

NOUVEAUX AVIS DE RECHERCHE

Avis de recherche n° 97 de Maurice Carmagnole (Sollies Toucas)
Voici une phrase autodescriptive en langue espagnole construite par Miguel A. Lerma (Université Polytechnique de Madrid). cf. Math. Intelligencer vol. 14 n° 1, p. 56 :
Esta frase contiene exactamente doscientas treinta y cinco letras : veinte a's, una b, dieciseis c's, trece d's, treinta e's, dos f's, una g, una h, diecinueve i's, una j, una k, dos l's, dos m's, veintidos n's, catorce o's, una p, una q, diez r's, treinta y tres s's, diecinueve t's, doce u's, cinco v's, una w, dos x's, cuatro y's y dos z's.
1) Quelqu'un a-t-il réussi une phrase française (ou anglaise, allemande, etc) aussi rigoureusement autodescriptive que celle de Lerma ?
2) Quelqu'un peut-il construire un algorithme pour programmer sur ordinateur une aide efficace à cette recherche ?

Avis de recherche n° 98 de Jean-Mathieu Bernat (Alençon)

La suite (n sin n) est-elle dense dans **R** ?

Avis de recherche n° 99 de Jean-Mathieu Bernat
Combien peut-on placer de points dans un disque de rayon 2, l'un étant au centre, de sorte que leurs distances mutuelles soient toujours supérieures ou

égales à 1 ? Réponse de Erdös : 20. Pourrais-je avoir une démonstration ?
NDLR : je pense que le disque est fermé. Le commun des mortels en placera certainement 19 comme moi aux nœuds d'un réseau triangulaire. Mais, pour le vingtième ? Erdös n'était-il pas un peu magicien ?

Avis de recherche n° 100 de M. Massé (Chartres)
Est-il possible de connaître l'origine historique de l'adjectif « relatif » dans l'expression : les entiers relatifs ?

Avis de recherche n° 101 de Robert Timon (Saint-Georges)
Instituteur, il m'arrive de demander à mes élèves de tracer un triangle équilatéral, puis un carré passant par les sommets du triangle. Cela m'a amené à me poser le problème suivant : autour d'un triangle équilatéral de côté unité, on circonscrit successivement des polygones réguliers de 4, 5, 6, ..., n côtés les uns dans les autres. Quel est le rayon du cercle, s'il existe, qui est limite des polygones circonscrits ?

RÉPONSES

Avis de recherche n° 84
Problème des boeufs de Newton : « sachant que $n_1(=75)$ bœufs ont brouté en $T_1(=12)$ jours l'herbe d'un pré de $S_1(=60)$ ares, et que $n_2(=81)$ bœufs ont brouté en $T_2(=15)$ jours l'herbe d'un pré de $S_2(=72)$ ares, on demande le nombre n_3 de bœufs nécessaires pour brouter en $T_3(=18)$ jours l'herbe d'un pré de $S_3(=96)$ ares. On suppose que dans les trois prés, l'herbe est à la même hauteur au moment de l'entrée des bœufs, et qu'elle continue de croître uniformément depuis leur entrée. »
La réponse donnée dans les livres conduit à la relation :

$$\frac{T_2 - T_3}{A_1} + \frac{T_3 - T_1}{A_2} + \frac{T_1 - T_2}{A_3} = 0 \text{ , où } A_i = \frac{n_i T_i}{S_i}, \text{ ce qui fournit } n_3 = 100.$$

Qu'en pensez-vous ?

Suite et fin du feuilleton (voir les deux bulletins précédents).
J'ai reçu l'été dernier des contributions de Robert Bourdon (Tourgeville) - « retraité en vacances, obligé de quitter sa pelouse à cause de ce problème » -, Claude Lamoureux (Centrale, Paris) - « Vous avez rendu ce problème plein de surprises et de choses infaisables, en un mot passionnant » -, Jean Lefort (Wintzenheim), Jean-Paul Roux (Unieux), Charles Roumieu (Montpellier), Isabelle Selon (Maisons-Lafitte) et André Viricel (Villers les Nancy).

Tout d'abord, la solution la plus claire et simple du problème initial (où l'on suppose la production d'herbe constante au cours du temps, quelle que soit la hauteur de l'herbe) est à mon avis celle de Jean Lefort :

1	bœuf mange	x	kg d'herbe en	1	jour
n	boeufs mangent	nx	kg d'herbe en	1	jour
n	bœufs mangent	ntx	kg d'herbe en	t	jours
1	are produit	y	kg d'herbe en	1	jour
s	ares produisent	sy	kg d'herbe en	1	jour
s	ares produisent	sty	kg d'herbe en	t	jours

Mais, au départ, chaque are possède une réserve de z kg d'herbe, donc s ares, une réserve de sz kg d'herbe. D'où la relation $ntx = sty + sz$, ce qui peut encore s'écrire : $\frac{nt}{s} = \frac{y}{x}t + \frac{z}{x}$. La quantité $\frac{nt}{s}$ est donc une fonction affine du temps. L'élimination des deux paramètres $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{x}$ conduit bien à la relation ci-dessus.

À la page suivante, on trouvera un tableau récapitulatif des diverses propositions de résolutions de ce problème.
La première ligne a été discutée dans le bulletin précédent et l'on remarque que la version discrète conduit exactement à la même relation entre n, T et S.
Les modèles « Ferréol continu et discret » ont aussi été discutés dans le bulletin précédent. On suppose que les bœufs mangent l'herbe sur toute sa hauteur et, qu'après, elle ne repousse plus. Je proposais dans le bulletin précédent de parler plutôt de jacinthes d'eau arrachées. Claude Lamoureux est venu à mon aide en proposant l'interprétation suivante : l'herbe repousse quand même, « mais les bœufs délaissent et ne rebroutent pas une partie déjà mangée (même lorsque l'herbe y a repoussé de façon significative) ».
Isabelle Selon propose une version où la repousse se fait cette fois proportionnellement non pas à la surface non broutée, mais à la surface broutée, ce qui parait franchement étonnanr. Mais ce qui est encore plus étonnant, c'est que le nombre de bœufs n_3 obtenu est rigoureusement le même (100,564...) dans les quatre cas Ferréol, Selon - continu, discret. En voici l'explication par Jean Moreau de Saint Martin : les relations entre n, T et S sont, dans les quatre cas, du type $k\mathrm{S} = nv(1-a^{\mathrm{T}})$, avec $a = e^{-k}$, $1 - k$ ou $1/(1+k)$. On a donc trois formules avec des fonctions $k_1(a)$, $k_2(a)$, ... telles que $\mathrm{S} \cdot k_i(a) = nv(1-a^{\mathrm{T}})$. Soit $w = v/k_i(a)$. Les couples donnés (S/N,T) fournissent trois relations entre a et w : $\mathrm{S} = nw(1-a^{\mathrm{T}})$, ce qui détermine a, w et le n inconnu (n_3). Il est donc inévitable que l'on retombe sur le même nombre de bœufs.

Hypothèse	Equation différentielle ou relation de récurrence	MODÈLE	Résolution	Relation entre n, T et $S = s(0) = s_0$	Valeurs numériques
$s(t+dt) = s(t) + ks(0)\,dt - nv\,dt$	$\frac{ds}{dt} = ks(0) - nv$	NEWTON CONTINU	$s = s(0) + (k\,s(0) - nv)\,t$	$\frac{nT}{S} = \frac{1+kT}{v}$	$n_3 = 100$ bœufs $k = 1/12$ par jour $v = 13$ m^2 par jour
$s_{p+1} = s_p - nv + ks_0$	$s_{p+1} = s_p - nv + ks_0$	NEWTON DISCRET	$s_p = s_0 + (k\,s_0 - nv)\,p$	Comme Newton continu	Comme Newton continu
$s(t+dt) = s(t) + ks(t)\,dt - nv\,dt$	$\frac{ds}{dt} = ks - nv$	FERREOL CONTINU	$s = \left(s(0) - \frac{nv}{k}\right)e^{kt} + \frac{nv}{k}$	$\frac{nT}{S} = \frac{kT}{v\left(1 - e^{-kT}\right)}$	$n_3 \approx 100{,}564$ bœufs $k \approx 10\%$ par jour $v = 11$ m^2 par jour
$s_{p+1} = s_p - nv + ks_p$	$s_{p+1} = (1+k)\,s_p - nv$	FERREOL DISCRET	$s_p = \left(s_0 - \frac{nv}{k}\right)(1+k)^p - \frac{nv}{k}$	$\frac{nT}{S} = \frac{kT}{v\left(1-(1+k)^{-T}\right)}$	$n_3 \approx 100{,}564$ bœufs $k \approx 11\%$ par jour $v = 12$ m^2 par jour
$s(t+dt) = s(t) + (k(s(0) - s(t))\,dt - nv\,dt$	$\frac{ds}{dt} = ks(0) - ks - nv$	SELON CONTINU	$s = \frac{nv}{k}e^{-kt} + s(0) - \frac{nv}{k}$	Comme Ferréol continu	Comme Ferréol continu
$s_{p+1} = s_p - nv + k\,(s_0 - s_p)$	$s_{p+1} = (1-k)\,s_p + ks_0 - nv$	SELON DISCRET	$s_p = \frac{nv}{k}(1-k)^p + s_0 - \frac{nv}{k}$	$\frac{nT}{S} = \frac{kT}{v\left(1-(1-k)^{T}\right)}$	$n_3 \approx 100{,}564$ bœufs $k \approx 10\%$ par jour $4 = 11$ m^2 par jour
$s(t+dt) = s(t) - \frac{nv}{1+ta}\,dt$	$\frac{ds}{dt} = -\frac{nv}{1+ta}$	LAMOUREUX CONTINU	$S = S(0) - \frac{nv}{a}\ln(1+at)$	$\frac{nT}{S} = \frac{aT}{v\ln(1+aT)}$	$n_3 \approx 99{,}59$ bœufs $a \approx 35\%$ par jour $v = 17$ m^2 par jour
$s_{p+1} = s_p - \frac{nv}{1+pa}$	$s_{p+1} = s_p - \frac{nv}{1+pa}$	LAMOUREUX DISCRET	$s_p = s_0 - nv\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{1+ia}$	$\frac{nT}{S} = \frac{T}{v\sum_{i=0}^{i-1}\frac{1}{1+ia}}$	$n_3 \approx 99{,}59$ bœufs $k \approx 31\%$ par jour $v = 14$ m^2 par jour

Venons en maintenant au modèle de Claude Lamoureux. Comme dans le mien, l'herbe est supposée être mangée sur toute sa hauteur, et ne plus être rebroutée (soit qu'elle ne repousse plus, soit qu'elle soit délaissée). Claude Lamoureux suit la consigne de Newton de croissance uniforme de l'herbe : à l'instant t, l'herbe non broutée a une hauteur $h = h_0 + wt$; entre t et $t + dt$, les n bœufs broutent un volume d'herbe égal à $n\mathrm{V}dt$ (V = vitesse volumique de broutage par bœuf) ; ils broutent donc une surface égale à $n\mathrm{V}dt/h$, ce qui donne l'équation différentielle :

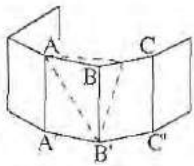
$$s(t+dt) = s(t) - \frac{n\mathrm{V}}{h_0 + wt}\,dt = s(t) - \frac{nv}{1+at}\,dt\,,$$

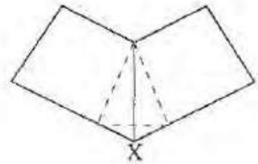
en posant $v = \mathrm{V}/h_0$, $a = w/h_0$. L'intégration de l'équation différentielle se fait par une simple primitivation et les calculs indiqués dans le tableau, ainsi que la version discrète se comprennent d'eux-mêmes. Le texte complet de Claude Lamoureux, plein d'humour et d'explications pertinentes, se trouve sur le serveur de l'APMEP.

Mais alors, quel est le bon modèle, dans le cas de non repousse de l'herbe (ou de non rebroutement) ?
Je pense que c'est celui de Claude Lamoureux.
En effet, je considère qu'entre t et $t + dt$, les n bœufs broutent une quantité d'herbe qui fait diminuer la surface d'une valeur indépendante de $tnv\,dt$ (faux car cette diminution dépend de la hauteur de l'herbe), mais que l'herbe repousse proportionnellement à la surface $s(t)$.
Par contre, je pense que mon modèle (qui est probablement dû à une déformation professionnelle : j'enseigne chaque année les équations différentielles à coefficients constants et les suites arithmético-géométriques) serait adapté à un problème plan comme celui de nénuphars ou de lentilles d'eau.
Il resterait enfin à expliquer de façon générale la remarquable stabilité de la valeur de n, quel que soit le modèle proposé, aussi loufoque soit-il.

À propos de **l'avis de recherche n^0 87** sur le théorème de l'excès sphérique, Jean-Pierre Le Goff (irem@matin.math.unicaen.fr) signale qu'il s'apprête à éditer le texte original d'Albert Girard tiré de son *Invention nouvelle en l'Algèbre* (Amsterdam, 1629).

Dans les compléments à **l'avis de recherche n^0 86** du bulletin précédent, où Michel Lafond démontrait le théorème de Steinitz, il manquait deux figures, que voici :





Avis de recherche n° 89

Qui peut dire d'où provient le joli résultat : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx = \frac{22}{7} - \pi$ **,**

facile à obtenir avec les méthodes d'intégration habituelles.

Réponse de Géry Huvent (Hem)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La division euclidienne de $P_n(X) = X^{4n}(1-X)^{4n}$ par $1 + X^2$ prouve l'existence d'un unique polynôme $Q_n \in \mathbf{Z}(X)$ tel que

$$X^{4n}(1-X)^{4n} = (1+X^2)Q_n(X) + (-1)^n 4^n .$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 Q_n(x)\,dx + (-1)^n 4^n \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = (-1)^n 4^n(\pi - a_n)$$

où $a_n \in \mathbf{Q}_+^*$. Alors

$$|\pi - a_n| = \frac{1}{4^{n-1}}\left|\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{1+x^2}\,dx\right| \leq \frac{1}{4^{5n-1}}$$

(car $x(1-x) \leq 1/4$).

On peut même donner un équivalent de $|\pi - a_n|$ en utilisant la méthode de Laplace : $\displaystyle\frac{1}{5 \cdot 4^{n-1}}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

On trouve $a_1 = \dfrac{22}{7}$, $a_2 = \dfrac{47171}{15015}$, $\pi - a_2 \approx 9{,}12 \times 10^{-7}$, $a_3 = \dfrac{431\,302\,721}{137\,287\,920}$.

NDLR : en consultant le magnifique livre de J.P. Delahaye « le fascinant nombre π » (Belin), j'ai pu remarquer que ni a_2, ni a_3 ne sont des réduites de π.