

## Curiosités mathématiques

### Commentaires sur 1999

#### Maurice Carmagnole

*Ces délires numériques, proposés dans le Bulletin de Novembre-Décembre, n'étaient destinés qu'à susciter la surprise chez nos élèves. Chaque collègue y aura trouvé la pitance convenant à son troupeau. Les commentaires ci-dessous donnent quelques idées, des références, parfois une leçon explicative pour ceux dont la formation a été lacunaire dans le domaine numérique...*

*Les numéros correspondent à ceux précédemment employés.*

1. Le millième nombre impair ! Il fallait le remarquer, et il faut que les collégiens cherchent à le prouver.

Puis, les plus jeunes s'étonneront devant ceci :  $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1+3}{5+7} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1}{3}$ , etc. Mais au lycée, on explorera la suite arithmétique des nombres impairs avec des moyens plus puissants, et on pourra aboutir à  $\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+\dots+(4n-1)} = \frac{1}{3}$ , soit  $\frac{n^2}{3n^2}$ . Si  $n = 500$ , on a le spectacle proposé pour 1999.

2. Quand on rencontre des nombres premiers tels que  $p$  et  $p + 2$ , on les dit **jumeaux**. Nul ne peut dire si on peut en rencontrer une infinité : problème ouvert depuis plus de deux millénaires.

Quant au nombre 666, c'est le très fameux « nombre de la Bête » dont parle l'apôtre JEAN dans son APOCALYPSE (chapitre XIII, verset 11).

Il n'y a évidemment aucune formule qui puisse permettre de déterminer la décomposition d'un nombre donné en somme de nombres premiers consécutifs : il faut donc stocker le crible d'Ératosthène, et programmer une exploration adéquate. Les lycéens devraient s'y intéresser et, bien entendu « stoc-

ker le crible » ne signifie pas entrer en mémoire les nombres premiers l'un après l'autre !

3.  $1000^2 - 999^2$ , c'est à priori succulent pour 1999. Les plus jeunes se laisseront séduire. Il faut inquiéter ces débutants et conduire les plus évolués d'entre eux à remarquer que tout  $n$  permet d'écrire :

$$(10^n)^2 - (10^n - 1)^2 = 2 \cdot 10^n - 1.$$

On recherchera alors si ça marche avec un autre nombre que 10 ... ou avec des puissances supérieures à 2, etc.

4. Un **palindrome**, c'est comme LAVAL ou NOYON, invariable dans les deux sens de lecture. Beaucoup de nombres sont des palindromes, mais entre 100 et 1000, 10% de nombres premiers le sont : 1999 en a « ramassé » trois, c'est une chance !

5. Dire que mil neuf cent quatre vingt dix-neuf s'écrit 13131 en base six, c'est prétendre que le polynôme  $x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x - 1998$  est divisible par  $x - 6$ . Il faudra que les lycéens s'en assurent et voient clairement comment on passe de l'une à l'autre de ces remarques.

Et puis, même au collège, en se répartissant le travail, on peut aussi rechercher s'il existe d'autres bases de numération où mil neuf cent quatre vingt dix-neuf est encore un palindrome... (en base TRENTE-SEPT, par exemple).

6.  $3^{1999}$  ne cache pas longtemps ses diviseurs : 1,  $3^1$ ,  $3^2$ ,  $3^3$ , ...,  $3^{1998}$ ,  $3^{1999}$ . On sépare aisément ceux d'exposant pair, dont la forme est  $4n + 1$ , de ceux d'exposant impair, dont la forme est  $4n + 3$ .

Dans les deux cas, on voit que les exposants forment une suite arithmétique connue, dont on peut, dès l'adolescence, calculer le nombre de termes : 1000.

Il faut pousser les lycéens à se demander ce qui se passe quand on remplace 1999 par un autre nombre... ou 3 par un autre nombre, etc.

7. Cf. n° 2, supra, en ce qui concerne 666. L'exploration des congruences est pleine de découvertes. Même avec les adolescents, la pratique du schéma euclidien  $a = bq + r$ ,  $r < b$  permet le passage sans douleur à  $a \equiv r \pmod{b}$ , énoncé «  $a$  congru à  $r$ , modulo  $b$  ».

On a ou on n'a pas le temps, en classe, de laisser découvrir ce qui se passe selon que  $b$  est premier ou non, en examinant l'ensemble des **résidus**

(r) pour un  $b$  donné.

L'étude des **résidus quadratiques** modulo un nombre premier  $p$  est le fondement d'un domaine important de la théorie des nombres, dont il n'est pas question de donner une idée ici. Pour un  $p$  premier, on étudie l'ensemble des  $r$  tels que  $x^2 \equiv r \pmod{p}$ , pour tout  $x$  inférieur à  $p$ .

On trouvera une initiation intéressante dans « Les nombres premiers », « Arithmétique et théorie des nombres » de la collection « Que sais-je ? », aux P.U.F.

8. Tout nombre premier impair s'écrit soit  $4k + 1$ , soit  $4k + 3$ . Les enfants exploreront le crible d'Ératosthène pour s'en rendre compte, et ils devront aussi constater que ces deux formes révèlent aussi des nombres qui ne sont pas premiers.

Ils exhiberont une foule de nombres premiers qui sont sommes de deux carrés, (notamment  $5 = 1^2 + 2^2$ ,  $13 = 2^2 + 3^2$ , ...), constateront qu'ils sont tous de la forme  $4k + 1$ , et se rendront compte que lorsqu'ils exhibent  $p = a^2 + b^2$ , personne n'est capable d'exhiber  $p + 2 = a^2 + b^2$ . Surtout pas le prof. Lire les ouvrages cités au n° 7.

9. Premier ou non, aucun nombre de la forme  $8n + 7$  ne peut s'écrire sous forme d'une somme de trois carrés. Les élèves en auront conscience, sans preuve, en exhibant beaucoup de sommes de trois carrés, notamment en faisant tourner un programme très simple à concevoir sur un ordinateur à quatre sous : ils pourront seulement constater qu'aucune de ces sommes ne peut s'écrire  $8n + 7$  (cf. BOREVITCH et CHAFAREVITCH : Théorie des nombres).

10. Tout  $n$  peut s'écrire sous forme de quatre carrés : théorème de LAGRANGE (1770). Voir les références indiquées au n° 7.

11. RAMANUJAN (1887 - 1920), né dans la région de Madras, découvrit une foule de résultats étonnants, alors qu'il n'avait reçu aucune formation universitaire de haut niveau. Les ayant adressés à G.H HARDY, professeur à Cambridge, celui-ci eut à cœur de le faire venir en Angleterre, impressionné par son génie, et ne le quitta plus, l'aidant à parvenir au rang des plus grands. Mais RAMANUJAN mourut jeune, sans s'épanouir réellement.

Sa formule

$$n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)}\sqrt{1+(n+2)(n+4)}$$

était issue d'un calcul de série convergeant vers  $2/\pi$ . Les lycéens en vérifie-

ront l'exactitude et aboutiront à la propriété énoncée pour 1999 en prenant  $n = 1997$ .

Si c'est trop facile, proposez-leur une autre trouvaille de RAMANUJAN :

$$\sqrt[3]{7\sqrt[3]{20} - 19} = \sqrt[3]{5/3} - \sqrt[3]{2/3},$$

par exemple.

12. Pierre FERMAT (1601 - 1665), juriste de profession, occupait ses loisirs en mathématicien génial. Son œuvre en arithmétique, géométrie, analyse, probabilités est remarquable, mais il n'en publia rien : tout est disséminé en papiers divers, et correspondance avec les mathématiciens de l'époque : PASCAL, MERSENNE, ROBERVAL... Lire « Précis des œuvres mathématiques de Pierre FERMAT », par E. BRASSINE, chez GABAY.

1602 chiffres... Ne les comptez pas un par un. Une calculette de collégien vous dira qu'en multipliant par 1996 le logarithme décimal de 2, elle trouve 601,45... Pour le collégien susdit, c'est obscur, mais ce sera lumineux au lycée.

Quant au nombre de diviseurs de  $2^{1998}$ , revoir le commentaire du n° 6 pour un raisonnement tiré du même tonneau.

On peut aussi faire exploiter, après l'avoir fait établir, la propriété suivante : si  $n$  s'écrit  $n = p^a \cdot q^b \cdot r^c \dots$  ( $p, q, r$  premiers), alors, le nombre des diviseurs de  $n$  s'écrit  $d(n) = (a + 1)(b + 1)(c + 1) \dots$

14. Dans la Russie pré-révolutionnaire vivait un Professeur d'université nommé RATCHINSKI. Il quitta un jour cette fonction, et préféra devenir maître d'école dans un village. Son enseignement préféré était le calcul mental. Un tableau de 1895 le représente parmi les tout-jeunes enfants de sa classe qui creusent leurs méninges en vue de calculer :

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

Le maître avait-il dit, ou les enfants avaient-ils trouvé que  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$  ?

Tout le monde avait dû voir que  $100 + 121 + 144 = 365$ , et finalement trouver 2 au quotient était un... jeu d'enfant.

Les élèves de RATCHINSKI étaient trop jeunes pour vouloir généraliser, en recherchant  $n$  nombres consécutifs dont la somme des carrés soit égale à la somme des  $(n - 1)$  carrés suivants, comme (10,11,12) et (13,14) ci-dessus, ou comme les très célèbres (3,4,5) ! Mais aussi (21,22,23,24), (25,26,27) ou encore (36,37,38,39,40), (41,42,43)... etc. Il y en a une infinité d'où a été

extraite la remarque sur les 1999 carrés consécutifs équivalents aux 1998 suivants. Lancez vos grands élèves à la découverte de la formule !

15. Cette propriété est une conséquence d'un théorème d'ERDÖS et SURANYI :

« Tout entier  $n$  peut s'exprimer par  $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm k^2$  ».

SIERPINSKI en donne une démonstration dans son livre « 250 problèmes de théorie élémentaire des nombres » (p.159 dans l'édition de J. GABAY).

16. Longtemps avant notre ère, les mathématiciens s'intéressèrent aux « **nombre** **figurés** » et à leurs nombreuses propriétés, notamment de récurrence. Voici un **nombre triangulaire** dont la base est quatre :

```

*
**
***
****

```

On le désigne par  $T_4 = 10$ . Il est banal, au lycée, de faire établir :

$$T_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Bien entendu, on construira aussi des nombres **carrés**, des nombres **pentagonaux**... Les élèves s'y intéressent, et les plus motivés admireront le lien entre les nombres figurés et le triangle arithmétique de PASCAL.

17. Libre à vous de calculer ce quotient, qui s'écrit avec plus de 5 700 chiffres. Le petit théorème de FERMAT nous dit : « Si  $p$  est premier, alors pour tout entier  $n$ , la différence  $n^p - n$  est divisible par  $p$ . »

Une conséquence en est le théorème de WILSON : « Si  $p$  est premier, alors  $(p-1)! + 1$  est divisible par  $p$ . »

Avec  $p = 1999$ , on obtient la merveille annoncée.

18. Cette astuce sur le produit 7 fois 9 relève du canular, mais les élèves auront à calculer la **fraction continue** et l'occasion est trop belle pour rappeler la passionnante brochure A.P.M.E.P « Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes », de Michel SERFATI (n° 86).

19. Quant à **cette intégrale**, bien sûr, c'est une vérité de La Palice... sauf pour ceux de nos potaches dont la calculette ne sait pas intégrer.