Dossier : Maths dans les formations post-bac

Un enseignement des probabilités en premier cycle de la filière A.E.S.

Yves Ducel, Hombeline Languereau
I.R.E.M.[1] , Université de Franche-Comté

Proposée aux étudiants des U.F.R. de Droit et Sciences Économiques depuis 1975, la filière A.E.S.[2] est une formation à vocation pluridisciplinaire dont l'objectif est de fournir des cadres moyens ou des gestionnaires aux administrations territoriales. Une rapide étude statistique montre que les étudiants d'A.E.S. de l'Université de Franche-Comté sont principalement originaires de la région et titulaires des baccalauréats, général série E.S., technique séries S.T.T., ou professionnels.

L'enseignement de mathématiques, qui comprend 25 heures de cours magistral et 34,5 heures de travaux dirigés, est dispensé uniquement en première année en vue de son application aux sciences sociales. Son programme est redéfini annuellement en fonction des besoins exprimés par les enseignants de la filière.

[1] Y. DUCEL (U.F.R. des Sciences et Techniques), H. LANGUEREAU (U.F.R. des Sciences Juridiques, Économiques, Politiques et de Gestion) : IREM - UFR des Sciences et Techniques, 16, Route de Gray, 25030 BESANÇON CEDEX

[2] Administration Économique et Sociale

Le contenu du cours de première année d'AES en 1996/97 comprenait trois thèmes :
- les mathématiques financières (9 heures de cours magistral),
- le calcul matriciel (6 heures de cours magistral),
- les probabilités (10 heures de cours magistral) dont l'enseignement fait l'objet d'une réflexion à travers cet article.

En 1997/98, l'enseignement de calcul matriciel est remplacé par un cours sur les dérivées partielles d'une fonction de deux variables.

Si le programme proposé, par ses objectifs d'acquisition de savoir-faire, apparaît essentiellement technique, dans sa mise en œuvre il est l'occasion de sensibiliser ces étudiants à la problématique de la modélisation. Notamment dans les deux dernières parties du cours : l'algèbre linéaire comme outil de modélisation de phénomènes déterministes issus de l'économie (modèle de Léontiev) et les probabilités dans l'étude des phénomènes aléatoires.

1 - L'enseignement des probabilités

« Organisation d'un univers d'objets strictement *virtuels*, dans lequel il introduit une spécification et éventuellement une mesure des *possibles*, le calcul des probabilités n'est en aucune manière, *en tant que tel*, un modèle des phénomènes. C'est une théorie mathématique qui ne nous dit rien de l'expérience. Ainsi que tous les concepts des structures mathématiques, cette théorie constitue une forme abstraite d'objets, tout à fait indépendants par la nature des contenus empiriques acruels qui sont ici des événements concrets, auxquels on pourra peut-être l'appliquer. Bien entendu, historiquement et psychologiquement parlant, cette théorie mathématique a été justement conçue et créée à l'occasion de problèmes posés par un désir de mettre en forme et de comprendre l'empirie, et donc en vue même de cetre application. ».

Comme l'explique dans ce texte Gilles-Gaston Granger[3],
- d'une part la naissance des probabilités a été motivée par le souci de répondre à des situations où intervient le hasard. Il s'agit de dire quelque chose sur le réel ; on est alors dans une démarche de physicien qui manipule les mathématiques comme des outils. Dans cette optique l'objet mathématique sert à modéliser le réel. Le rapport du formel au réel est ici

[3] GRANGER G.-G., *Le probable, le possible et le virtuel*, Coll. Philosophie, éd. Odile Jacob, 1995, p. 142.

fondamental.
- d'autre part l'évolution récente en a fait une théorie formalisée au même titre que les autres branches des mathématiques. Dans ce cadre, seuls interviennent des raisonnements logiques sans référence au réel pour lesquels le hasard n'existe pas. C'est pourquoi il n'est pas étonnant de pouvoir démontrer des théorèmes d'analyse à l'aide de l'outil probabiliste. Le théorème de Weierstrass en fournit un exemple.

C'est ce double statut des probabilités, analysé comme principale source de difficultés pédagogiques, que nous prendrons en compte dans nos objectifs d'enseignement[4].

1) Objectifs

L'enseignement des probabilités en A.E.S se propose de développer chez les étudiants une réflexion sur ce double statut en insistant particulièrement sur la modélisation des phénomènes aléatoires.

Cette préoccupation sera constante tout au long du cours avec des moments forts lors de l'introduction de la notion de probabilité. Pour cela cette réflexion sera l'occasion d'introduire les notions mathématiques nécessaires à la formalisation élémentaire de phénomènes aléatoires. En terme de notions, l'objectif sera centré sur l'apprentissage du concept de loi de probabilité modélisant des phénomènes discrets et continus ainsi que les notions connexes d'espace de probabilité, de variables aléatoires et la définition de fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Afin de donner une présentation unifiée de ces notions, tant dans les cas discret que continu, l'étude des variables aléatoires discrètes sera développée en privilégiant l'approche par la fonction de répartition et en évitant tout recours à des arguments relevant de méthodes de dénombrement. De plus la nécessité d'éviter toute difficulté d'ordre mathématique, comme l'utilisation du calcul intégral, et compte-tenu de l'importance pratique de la loi normale, l'usage de la table de la loi normale centrée réduite sera un des savoir-faire visés.

2) Démarche

Conformément à l'objectif précisé, l'approche sera d'abord expérimentale

[4] Pour une analyse de diverses conceptions de l'enseignement des probabilités, on pourra consulter BOROVCNIK M. et PEARD R., *Probability* in *International Handbook of Mathematics Education*, Chapitre VII, éditeurs A.J. Bishop et al., Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 239-287.

avec le recours à l'histoire pour alimenter une réflexion sur la problématique de la modélisation. Pour cela on proposera aux étudiants de réaliser des expériences aléatoires en lien avec des textes historiques.

Les étudiants seront alors amenés à développer une approche fréquentiste en continuité avec les objectifs et méthodes préconisés par les programmes des lycées. L'enseignant prendra appui sur ces expériences pour construire la base du formalisme et ainsi expliquer le rapport du formel au réel.

Comme la fonction de répartition constitue un outil adapté aussi bien à l'étude des phénomènes continus que discrets, nous avons choisi de privilégier cette notion. Cette approche, en particulier grâce à l'utilisation des tables numériques, a aussi l'avantage d'éviter les problèmes techniques mathématiques qui surgissent dès qu'on aborde la formalisation des phénomènes continus.

3) Difficultés de l'enseignement

Une première difficulté est inhérente aux choix pédagogiques effectués dans les objectifs. La démarche expérimentale mise en œuvre dans l'approche des concepts ne se prête pas aisément à la classique structure cours-magistral/travaux-dirigés ni aux habitudes pédagogiques (cours souvent dictés) dans les U.F.R. de Droit et Sciences Économiques. Cependant cette rigidité structurelle est en partie compensée par une très grande concertation au sein de l'équipe pédagogique des trois enseignants de mathématiques intervenant en A.E.S. et une totale liberté au niveau tant des contenus que des compétences exigibles lors des examens. Cette concertation se traduit concrètement par des fiches de travaux dirigés en lien étroit avec le cours magistral, communes à tous les groupes d'étudiants et une grande cohérence, quant aux objectifs, dans le discours et les pratiques des enseignants.

La seconde difficulté est inhérente à la vocation pluridisciplinaire de la filière A.E.S. qui conduit à accueillir des étudiants de cursus scolaires très variés. Tous ont eu un enseignement de probabilité au lycée[5] dont l'objectif était orienté suivant la série, soit vers des savoir-faire immédiats (bacs professionnels ou techuologiques), soit vers l'étude de la modélisation (bacs généraux). Aussi l'approche proposée doit-elle permettre à la grande majorité des étudiants de retrouver des points de vue familiers en fonction de leurs antécédents scolaires tout en les amenant à prendre en compte d'autres

[5] Pour une étude sur l'enseignement des probabilités au lycée, on consultera HENRY A. et M., « L'enseignement des probabilités dans les programmes de première », *Repères IREM*, nº 6, janvier 1992, p. 27-52 et HENRY M., « L'enseignement du calcul des probabilités dans le second degré », *Repères IREM*, nº 14, janvier 1994, p. 69-104.

aspects de cette discipline.

II - Activités de modélisation

La première partie du cours magistral est principalement basée sur la pratique expérimentale et la réflexion autour de ces expériences. Sur les deux grandes activités qui la constitueront, la première est conçue comme une introduction à la problématique de la modélisation et la seconde une activité de transition vers la notion mathématique de probabilité.

Outre les objectifs déjà cités à atteindre, cette partie du cours est construite en vue de permettre aux étudiants de réinvestir les acquis et pratiques du lycée, mais aussi d'autoriser un niveau de langage accessible à tous, tout en proposant diverses formulations. Enfin, compte-tenu des contraintes d'un enseignement en amphithéâtre, si la première activité est intégralement réalisée par les étudiants en amphithéâtre, la seconde n'est que « semi-expérimentale » au sens où l'expérience démarrée en cours est achevée par l'enseignant afin de faciliter la gestion du temps de classe et la poursuite du cours sur de nouveaux objectifs.

1) Analyse de modèles : le paradoxe de D'Alembert

La première activité proposée en amphithéâtre a pour objectif de poser la problématique de la modélisation d'une situation concrète faisant intervenir le hasard. Pour cela nous distribuons à chaque étudiant l'article « Croix ou *Pile* » écrit par D'Alembert dans *l'Encyclopédie Méthodique de Mathématiques* [D'ALEMBERT]. Dans ce texte, D'Alembert cherche à déterminer « combien il y a à parier qu'on amènera croix en jouant deux coups consécutifs ». Après avoir présenté la « réponse de tous les auteurs », D'Alembert se demande si cela est « bien exact » et oppose une antre pour laquelle il tient pour nul le second coup lorsque l'issue du premier est croix, et se contente de conclure « ceci est digne, ce me semble, de l'attention des calculateurs, et irait à réformer bien des règles unanimement reçues sur les jeux de hasard ».

Après une lecture individuelle du texte (voir annexe), les étudiants sont invités à faire part de leurs remarques sur les objections formulées par d'Alembert relatives à la solution exposée en début d'article. Dans un premier temps, aucune remarque n'est faite. L'enseignant circule dans l'amphi, ce qui permet aux étudiants de faire part de leurs commentaires dans des dialogues « privés » avec l'enseignant. On voit là un effet de la difficulté de prise de parole dans un amphithéâtre pour des étudiants de première année peu habitués à cette structure et à cette pratique pédagogiques. Trois grandes

catégories d'étudiants se dégagent de ces remarques :
- ceux qui, acceptant la première réponse, ignorent l'objection de D'Alembert,
- ceux qui, acceptant la première réponse, sont déstabilisés par l'objection de D'Alembert et se demandent quelle serait la « bonne » réponse si par hasard la question se posait le jour de l'examen,
- quelques-uns sont prêts à accepter indifféremment une des deux réponses suivant le discours du professeur.

De ces diverses attitudes émergent principalement les questions suivantes reprises par l'enseignant : pourquoi y a-t-il plusieurs réponses ?, quelle réponse peut-on accepter ? Ces questions en amènent d'autres, élargissant ainsi la problématique : qu'appellera-t on « accepter une réponse » ?, pourquoi n'y aurait-il qu'une seule réponse ? Ces interrogations sont privilégiées par l'enseignant car elles posent implicitement le problème des motivations et de l'intérêt d'une théorie des probabilités. C'est cet implicite qui est ensuite dégagé en commun avec les étudiants pour développer une réflexion sur la notion de probabilité.

La discussion commune aboutit à l'idée qu'une théorie des probabilités devrait permettre une certaine connaissance du monde réel. Celle-ci pourrait se traduire par exemple par une mesure du degré d'occurence d'un événement : la probabilité de l'événement en question. Se pose alors le problème de la signification épistémologique de cette mesure : si on répète un grand nombre de fois l'expérience concernant l'événement, la fréquence observée d'apparition et la mesure de cet événement doivent pouvoir être considérées comme sensiblement égales. Dans ce contexte, les deux solutions proposées dans l'article de D'Alembert apparaissent comme deux « modèles » concurrents de la réalité dont il faut tester la validité pour décider lequel on accepte[6].

Les remarques précédentes fournissent ainsi un moyen empirique de répondre aux questions suscitées par l'article. Il suffit de réaliser un grand nombre de fois l'expérience suivante : lancer une pièce deux fois de suite, et calculer la fréquence d'apparition d'amener « Croix » au moins une fois au cours des deux lancers. Chaque étudiant réalise l'expérience exactement dix fois et communique le nombre d'occurences d'amener « Croix » au moins une fois. Dans un premier temps, il était prévu que les étudiants

---

[6] On se reportera aussi à l'article de M. HENRY « Le jeu de "Croix ou Pile" de D'Alembert, réalité observable et modélisation » in [C.I.-I. « STATISTIQUE et PROBABILITÉS », p. 335-338].

communiquent leurs résultats par écrit. Afin de collecter rapidement les résultats le professeur annonce « *les étudiants qui ont gagné 0 fois lèvent la main* », les compte, puis itère le procédé pour les nombres de 1 à 10. Après avoir calculé la fréquence d'apparition à partir des données précédentes et trouvé 0,72, le premier modèle proposé est perçu comme plus satisfaisant que le second.

Il s'en suit alors une discussion sur les fluctuations de la fréquence d'apparition dans le cas où on recommencerait une série d'expériences. Il en ressort que, si on effectuait un grand nombre de telles séries, les fréquences observées, à quelques exceptions près, seraient proches de 0,75.

Cette activité et les discussions s'y rapportant sont l'occasion de redéfinir et de préciser, en le faisant fonctionner, le vocabulaire usuel des probabilités en grande partie déjà vu au lycée : modèle, expérience aléatoire, univers, événement, issue, fréquence empirique.

La réflexion sur l'usage des probabilités dans la vie sociale est prolongée en T.D. par un travail sur le problème des partis inspiré de la démarche présentée par le groupe[7] « M.A.T.H. » de l'IREM de Paris VII.

2) Construction de modèles : choix d'une probabilité a priori

Cette deuxième phase du cours est conçue comme un travail préparatoire à la définition et aux propriétés élémentaires de la notion mathématique de probabilité. La démarche proposée est toujours expérimentale mais contrairement à la première situation, il n'y a pas de modèle donné *a priori*. Il s'agit donc d'en construire un en réinvestissant les méthodes mises en évidence dans les séances de cours précédentes.

Pour cela l'enseignant utilise une urne contenant une centaine de bouts de papier identiques sur lesquels sont inscrits dés nombres entiers non connus. L'enseignant demande « *quelle est la probabilité d'extraire le nombre 172 ?* ». Cette question a pour objectif de faire réaliser aux étudiants qu'ils n'ont aucun moyen mathématique de déterminer cette probabilité. La seule possibilité de répondre à cette question est d'avoir recours à la pratique expérimentale. Pour cela on effectue quelques tirages aléatoires avec remise, pour chacun de ces tirages on note le numéro extrait. On obtient ainsi une suite de nombres entiers. Afin d'accélérer le déroulement de la séquence de

---

[7] Mathématiques : Approche par les Textes Historiques, *Le problème des partis de PACIOLI à PASCAL et FERMAT (1494-1694)*, Brochure-IREM n° 61, IREM de Paris VII, janvier 1986, p. 99-149.

cours, le professeur distribue aux étudiants une liste de 300 tirages préparée antérieurement suivant la même démarche.

L'analyse du document montre que les numéros tirés sont compris entre « 0 » et « 10 ». De cette remarque on décide que la probabilité d'extraire un numéro supérieur à 10 est nulle. Dans ce modèle probabiliste en construction, l'univers est constitué de l'ensemble des entiers compris entre 0 et 10. Les événements élémentaires sont représentés par les singletons de cet univers. De plus, certains numéros, par exemple « 5 », sont sortis plus souvent que d'autres, par exemple « 10 ». Se pose alors la question de la détermination de la probabilité de chaque événement élémentaire. Conformément à ce qui a été vu plus haut, il est naturel de choisir, comme probabilité *a priori*, la fréquence observée de l'événement élémentaire. Avec les données obtenues expérimentalement, cela conduit à attribuer respectivement les valeurs 6/300, 8/300, 22/300, 46/300, 47/300, 59/300, 51/300, 32/300, 20/300, 7/300, 2/300 aux probabilités des événements élémentaires $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, ... , $\{9\}$, $\{10\}$. À ce stade de l'activité pédagogique, les éléments de base du modèle, l'univers et la valeur de la probabilité de chaque événement élémentaire sont mis en place. Il reste à montrer comment faire fonctionner ce modèle, c'est-à-dire donner les règles opératoires du calcul des probabilités.

Dans ce but, on demande aux étudiants de déterminer quelle valeur prendre pour la probabilité d'extraire un numéro pair. L'événement correspondant est modélisé par la partie $\{0,2,4,6,8,10\}$ de l'univers. Cet événement est reconnu comme non élémentaire et un calcul de la fréquence d'apparition donne la valeur 148/300. De par les calculs effectués, on s'aperçoit alors que la probabilité de l'événement $\{0,2,4,6,8,10\}$ est la somme des probabilités des événements élémentaires respectifs $\{0\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{8\}$, $\{10\}$. Des calculs et remarques analogues sont ensuite demandés aux étudiants pour faire fonctionner de façon empirique les règles classiques concernant le calcul de la probabilité d'une réunion quelconque d'événements et celle d'un événement complémentaire.

Le travail précédent met alors en évidence, dans le contexte étudié, le rôle joué par les probabilités des événements élémentaires dans la caractérisation du modèle : la connaissance de ces probabilités détermine le calcul des probabilités de tous les événements qu'on peut considérer dans cette situation. Afin de préparer l'étudiant à la notion de fonction de répartition et à l'usage qui en sera fait en cours dans l'étude des phénomènes aléatoires continus, l'enseignant demande aux étudiants de vérifier que le modèle étudié peut aussi être caractérisé par la connaissance des probabilités d'extraire un numéro inférieur à n où n est un entier inférieur ou égal à 10.

Le cours se poursuit alors par une phase d'institutionnalisation du vocabulaire utilisé et des propriétés mises en évidence. La probabilité est définie comme une application de l'ensemble des parties de l'univers à valeurs dans l'intervalle [0,1] satisfaisant à l'axiome de simple-additivité. On définit la fonction de répartition et on énonce, dans le formalisme introduit, les propriétés remarquées expérimentalement dans les activités préparatoires. A titre d'exemples de démonstrations, certaines de ces propriétés sont retrouvées à partir des définitions posées par des raisonnements de nature ensembliste.

III - Activités autour de la notion de loi

Cette seconde partie du cours fait une plus grande place au formalisme mathématique et à sa manipulation.

Dans l'étude des phénomènes aléatoires on a recours de façon très naturelle à la notion de variable aléatoire[8]. C'est cette notion avec celle de distribution d'une variable aléatoire qui sera l'objet de la dernière partie du cours. Nous considérerons d'abord le cas discret en vue d'éviter des problèmes techniques. Le cas continu fera l'objet d'une étude visant simplement à sensibiliser les étudiants à cette classe de variables aléatoires et à leur procurer un savoir-faire élémentaire consistant principalement en la lecture de la table de la loi normale centrée réduite, notamment pour ses applications en Sciences Sociales et Économiques. La dernière séquence fera le lien entre les cas discret et continu.

Les prérequis à ce travail sont volontairement limités à la théorie naïve des ensembles et ont fait l'objet d'une étude préliminaire à cet effet. La notion de tribu n'est bien sûr pas du tout évoquée compte tenu du public et des objectifs de cet enseignement.

1) Le cas discret

L'expérience aléatoire « Croix ou Pile » décrite dans l'article de D'Alembert nous sert de support à l'introduction de la notion de variable aléatoire. Pour cela nous explicitons avec les étudiants un modèle probabiliste par le choix de l'univers de référence $\Omega = \{(f,p),(p,f),(f,f),(p,p)\}$ affecté de la probabilité uniforme P. Ensuite nous nous intéressons au nombre S de « Pile » obtenus au cours d'une épreuve. Nous remarquons immédiatement que ce nombre S, dépendant de l'issue de l'épreuve, ne peut prendre que les valeurs 0, 1 ou 2 suivant le tableau ci-dessous :

[8] Une réflexion sur les notions mathématiques de variable aléatoire et de loi de probabilité est développée dans [DUCEL].

issues	S
(p,p)	2
(f,p)	1
(p,f)	1
(f,f)	0

L'événement « *le nombre de Pile obtenu est 2* », qu'on écrit symboliquement $\{S = 2\}$, est modélisé par la partie de l'univers $\{(p,p)\}$, ce qu'on peut écrire $\{S = 2\} = \{(p,p)\}$. La probabilité de cet événement est 1/4. De même l'événement « *le nombre de Pile obtenu est 1* », écrit symboliquement $\{S = 1\}$, est modélisé par la partie de l'univers $\{(p,f),(f,p)\}$, ce qui peut s'écrire $\{S = 1\} = \{(p,f),(f,p)\}$. Sa probabilité est 1/2.

Pour traduire mathématiquement la dépendance de S par rapport aux issues des épreuves, nous regarderons S comme une application de l'ensemble Ω dans l'ensemble $\{0,1,2\}$ définie par le tableau ci-dessus. Dans ce cadre fonctionnel, la relation ensembliste $\{S = 1\} = \{(p,f),(f,p)\}$ peut s'exprimer dans le langage et les notations des images-réciproques d'application en remarquant que $\{(p,f),(f,p)\}$ est l'image réciproque du singleton $\{1\}$ par l'application S ou $\{(p,f),(f,p)\} = S^{-1}(\{1\})$. De même pour les autres événements $\{S = 2\} = \{(p,p)\} = S^{-1}(\{2\})$ et $\{S = 0\} = \{(f,f)\} = S^{-1}(\{0\})$.

A titre d'exercice de réinvestissement et d'approfondissement, les étudiants doivent expliciter de la même façon les événements $\{S \leq 0\}$, $\{S \leq 1\}$, $\{S \leq 2\}$ et établir des relations ensemblistes entre eux et les événements $\{S = 0\}$, $\{S = 1\}$, $\{S = 2\}$.

A chaque valeur de S on peut associer la probabilité d'obtenir cette valeur dans une épreuve ou s'intéresser au cumul de ces probabilités suivant le tableau :

x	$P(S = x)$	$P(S \leq x)$
0	1/4	1/4
1	1/2	3/4
2	1/4	1

On définit ainsi deux applications de l'ensemble des valeurs de S dans l'intervalle $[0,1]$, une qui représente la distribution probabiliste de S (colonne 2 du tableau) et l'autre la fonction de répartition de S (colonne 3 du tableau).

Les notions utilisées dans cette activité d'introduction sont alors reprises dans le cadre général de la définition d'une variable aléatoire. Une variable aléatoire est une application de l'univers Ω dans l'ensemble des nombres réels. Le rôle joué par les tribus dans cette définition est volontairement occulté. Les propriétés classiques des fonctions de répartition sont énoncées en lien avec l'activité précédente et la croissance est alors démontrée à titre de réinvestissement des règles usuelles sur les probabilités.

Une phase d'approfondissement de ces définitions est ensuite proposée. Elle prend pour support le lancer de deux dés dans lequel, après avoir précisé le modèle utilisé, on s'intéresse aux variables aléatoires « somme des points obtenus » et « plus grand des nombres obtenus ». Une place importante est réservée aux représentations graphiques de la distribution et de la fonction de répartition.

A son tour ce travail sert d'introduction aux définitions de l'espérance mathématique et de l'écart-type d'une variable aléatoire.

Les Travaux Dirigés sont l'occasion de travailler ces notions dans le cadre des lois binomiale et de Poisson avec l'objectif de remarquer que, pour les grandes valeurs de certains paramètres, les courbes (en escalier) représentatives des fonctions de répartition de ces lois peuvent pratiquement être assimilées à une ligne continue. Un travail analogue est fait à partir des courbes des distributions de ces variables aléatoires[9].

2) Le cas continu

Certains phénomènes aléatoires conduisent à envisager des variables prenant des valeurs non nécessairement entières. De plus le travail effectué en T.D. sur les lois discrètes à grands paramètres montre qu'elles se prêtent mal aux calculs pratiques. Ces considérations justifient l'intérêt d'aborder l'étude des variables continues en cours quitte à laisser de côté la rigueur mathématique.

L'étude de la loi uniforme sert d'introduction à cette partie du cours. En effet, l'avantage pédagogique de cette loi sur la loi normale est d'avoir une fonction de répartition d'expression analytique simple. Le travail demandé est le même pour les deux lois sauf dans la conduite des calculs, qui sont exacts avec la loi uniforme et approchés avec la loi normale.

Gardant la définition vue précédemment des variables aléatoires, on considère une variable S dont la fonction de répartition F est définie sur l'ensemble des nombres réels par $F(x) = x$ si $0 < x < 1$, $F(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F(x) = 1$ si $1 \leq x$.

[9] A ce sujet on pourra consulter [CALOT], p. 445-452.

Après avoir fait dessiner sa représentation graphique et vérifier ses propriétés en tant que fonction de répartition, il est demandé aux étudiants de déterminer la probabilité des événements $\{S \leq 0{,}7\}$, $\{S > 0{,}3\}$, $\{S \leq 2\}$, $\{0{,}4 < S \leq 0{,}7\}$. Ces calculs faits et corrigés, on pose la même question pour les événements $\{S^2 \leq 0{,}49\}$, $\{0{,}04 < S^2 \leq 0{,}49\}$, $\{S^2 > 0{,}64\}$, $\{3S + 1 \leq 2\}$. Des activités analogues sont proposées en T.D.

La démarche précédente est ensuite reprise pour l'étude d'une variable aléatoire S de loi normale centrée réduite. La seule différence réside dans la définition de la fonction de répartition de S qui, contrairement au cas de la loi uniforme, est ici définie approximativement à partir des valeurs tabulées lues dans la table[10] distribuée aux étudiants.

L'allure de la fonction de répartition est dessinée au tableau et sert de support visuel à l'explication de l'usage de la table de la loi normale centrée réduite. Les questions portent sur la détermination de probabilités d'événements de la forme $\{S > a\}$, $\{S \leq b\}$, $\{a < S \leq b\}$, $\{a < S^2 \leq b\}$, $\{S^2 > a\}$, $\{aS + b \leq c\}$ où a, b et c sont des réels dont les valeurs sont judicieusement choisies par l'enseignant afin de rendre les calculs aisés. Une attention particulière est accordée à l'étude des événements de la forme $\{aS + b \leq c\}$ qui sert de transition à un travail sur la loi normale de moyenne μ, d'écart-type σ.

3) Le continu limite du discret

Cette dernière séance de cours est conçue d'abord comme une phase d'institutionnalisation de remarques faites en TD lors de calculs faisant intervenir des lois binomiales et de Poisson de grands paramètres. A partir de considérations purement graphiques des distributions de ces lois, elle a pour objectif de montrer l'intérêt, pour certaines valeurs des paramètres, d'assimiler un graphique à un autre afin de faciliter les calculs.

En outre la comparaison avec les courbes représentatives de fonctions de répartition de loi normale vues dans les séances précédentes illustre la possibilité d'approximer des distributions discrètes par des lois normales. Des calculs précis sont faits permettant de comparer les valeurs trouvées en appliquant la loi exacte d'une part et la loi approchée d'autre part. Cette séance se termine par l'énoncé des théorèmes usuels d'approximation en loi pour les variables aléatoires binomiales, de Poisson et normales. Il est seulement demandé de savoir les appliquer dans des cas pratiques élémentaires.

---

[10] Cette table donne les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On peut la trouver par exemple dans [CALOT], p. 455.

Bibliographie

BELLETANTE B. et ROMIER B., *Mathématiques et gestion - les outils fondamentaux*, Éditions Ellipses, 1991.
CALOT G., Cours *de calcul des probabilités*, Éditions Bordas-Dunod, 1967.
C.I.-I. « STATISTIQUE et PROBABILITÉS », *Enseigner les probabilités au lycée*, Publication du réseau des IREM, Édition de l'IREM de Reims, 1997.
D'ALEMBERT J., « Croix ou Pile », *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, tome 1, Paris, 1784. p. 472-473. Réédition de Bicentenaire, ACL-éditions, 1987.
DORIER J.-L. et DUC-JACQUET M., *Mathématiques pour l'économie et la gestion*, Gualino éditeur, 1996.
DUCEL Y., « Loi d'une variable aléatoire », *Mathématiques vivantes*, Bulletin de l'IREM de Besançon, n° 61, juin 1997, p. 41-52.
GROSDIDIER A., *Mathématiques financières*, Éditions Foucher, 1992.

Annexe
(Texte de d'Alembert annoncé p. 65)

Croix ou Pile, *(analyse des hasards.)* : Ce jeu, qui est très connu, et qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amènera *croix* en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans tons les auteurs, et suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons.

Premier coup	Second coup
Croix	Croix
Pile	Croix
Croix	Pile
Pile	Pile

De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre et trois font gagner ; il y a donc trois contre un à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. S'il pariait en trois coups, on trouverait huit combinaisons, dont une seule fait perdre, et sept font gagner ; ainsi, il y aurait sept contre un à parier. Cependant cela est-il bien exact ? Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup ? Car, dès qu'une fois *croix* est venu, le jeu est fini, et le second coup est compté pour rien. Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles.

Croix, premier coup.
Pile, croix, premier et second coup.
Pile, pile, premier et second coup.

Donc il n'y a que deux contre un à parier. De même, dans le cas de trois coups, on trouvera :

Croix.
Pile, croix.
Pile, pile, croix.
Pile, pile, pile.

Donc il n'y a que trois contre un à parier. Ceci est digne, ce me semble, de l'attention des calculateurs, et irait à réformer bien des règles unanimement reçues sur les jeux de hasard.[…].