Dossier : Maths dans les formations post-bac

Quelle géométrie pour l'élève architecte ?

F. Bonafé* et T. Berthomier**

Depuis 1992, quelques enseignants[1] du groupe géométrie de l'IREM de Montpellier, en activité dans le secondaire, collaborent (comme vacataires) à l'enseignement de la géométrie à l'EARL[2]. Cette collaboration a permis de cerner plus clairement le profil et les lacunes des entrants à l'EARL, un contenu et des méthodes pour l'enseignement de la géométrie (distinct de l'enseignement de la représentation) paraissant les mieux adaptés à cette population.

Afin de cerner plus précisément la population concernée, nous proposons un test à tous les étudiants de première année le jour de la rentrée. Nous présentons ci-après quelques résultats dégagés des réponses obtenues lors des rentrées de 1993 et 1995 (durant cette période les dénominations des divers baccalauréats ainsi que les contenus enseignés ont été quelque peu modifiés).

1°) LES ENTRANTS A L'EARL.

Nous avons classé les étudiants de première année en trois catégories :
- **S** : il s'agit de ceux qui entrent avec un baccalauréat général à caractère scientifique récent (moins de quatre ans) ;
- **L** : ce sont ceux qui entrent avec un baccalauréat général à caractère non

* IREM de Montpellier
** École d'Architecture Montpellier
1. Robert BRUNET, Marie-Claire COMBES, Freddy BONAFÉ
2. École d'Architecture Languedoc-Roussillon

scientifique récent (moins de quatre ans) ;
- **T** : nous avons regroupé là les étudiants possédant un diplôme à caractère technologique récent (moins de quatre ans) ainsi que les étudiants ayant une expérience professionnelle, quel que soit le niveau acquis en fin d'études secondaires.

Pour les deux années observées, ils se répartissent de la façon suivante (en %) :

	S	L	T
Année 93/94	45	21	34
Année 95/96	59	21	20

Cette répartition est une spécificité de l'EARL. On ne la retrouve pas dans les autres filières de l'enseignement supérieur.

2°) LE TEST ET LES RÉSULTATS.

Le dépouillement du questionnaire (qui se trouve en annexe 1) fait apparaître des résultats globalement peu différents pour les deux années observées.

Les résultats aux premières questions sont conformes aux pronostics : égalités remarquables, médiatrices, sont bien connues de tous. Il n'en est pas de même de l'ellipse car elle n'est étudiée que dans certaines classes scientifiques et, pour les autres étudiants, elle relève simplement de la culture acquise sur le sujet.

Les questions 5 et 6.

Environ 70% des candidats donnent une bonne définition du centre de gravité. On observe quelques contradictions entre la figure et le langage associé : médiane est parfois remplacé par médiatrice ou hauteur.

Quand il s'agit de donner *sa propriété* (il faut en choisir une), il ne reste que 38% des étudiants pour donner une propriété correcte du centre de gravité.

Enfin au sujet de l'exercice 6, seulement 29% font référence à une hauteur d'un triangle.

Le tableau qui suit présente ces résultats par catégories d'étudiants ; on peut noter l'importance de certains écarts.

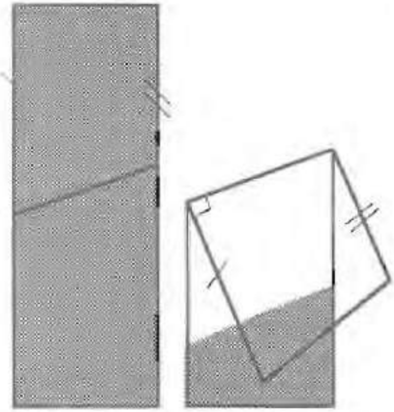
	S	L	L	Ensemble
Question 5b	85	58	58	70
Question 5b	53	20	25	38
Question 6	38	8	32	29

Au-delà des simples questions de vocabulaire, on constate une méconnaissance profonde des concepts de centre de gravité et de hauteur dans un triangle.

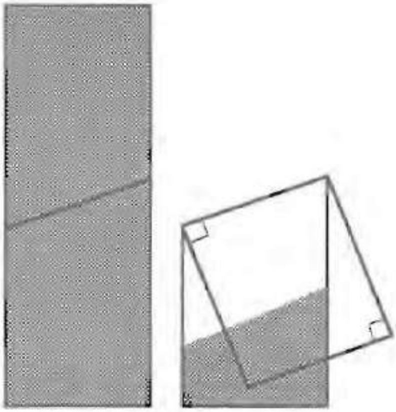
La question 7.

Dans 6% des copies, la réponse est absente. Seulement 39% des candidats proposent une solution acceptable à cet exercice. Cela va de 48% en **S** à seulement 23% en **L**. Si l'on s'intéresse à la notion d'invariant, c'est l'angle droit supérieur qui est le plus souvent conservé : c'est vrai pour 70% des dessins. Les longueurs sont conservées dans 60% des dessins, les autres angles (pliage) ne le sont que dans seulement 45% des cas.

Par contre, 37% des dessins montrent les bords de la partie repliée perpendiculaires au pli ce qui conduit à un choix concernant les invariances d'angles ou de longueur. Les dessins suivants sont des prototypes de ces dernières réponses :



Priorité aux longueurs des bords



Priorité aux angles droits de l'extrémité

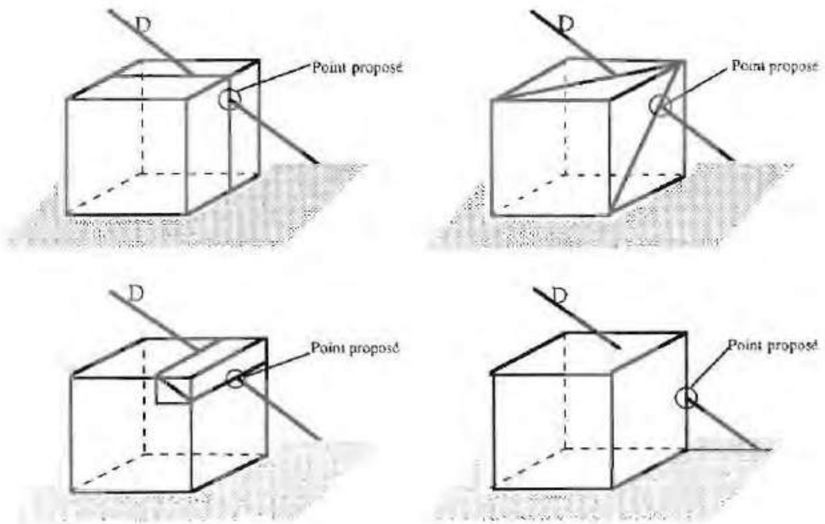
Pour plus d'un tiers des étudiants, l'invariance dans un déplacement n'affecte pas de façon globale une figure. Cette notion est parcellaire et peut affecter longueurs ou angles de façon indépendante.

La question 8.

La question posée n'impose pas explicitement une réponse graphique ; deux étudiants ont d'ailleurs affirmé qu'il ne leur était pas possible de répondre, les données étant pour eux insuffisantes. Dans 8% des copies, la réponse est absente sans qu'une explication soit fournie. Dans 6% des copies seulement, le dessin est correct : il ne contient pas d'incohérence et il montre que les deux points où la droite D paraît traverser des plans horizontaux ont étés utilisés dans la construction.

Dans 35% des copies, la réponse semble relever du hasard. Ce type de réponse parait indépendant de l'origine de l'étudiant ; les résultats sont identiques quelles que soient l'année observée ou leur formation antérieure.

Dans tous les autres cas présentant des éléments de construction, on observe des incohérences entre les « théorèmes » mis en oeuvre et les données du problème. Ces incohérences conduisent les étudiants à ne prendre en compte qu'un seul point donné et une direction arbitraire pour définir la droite D. Les figures suivantes sont des prototypes de leurs productions :



Les propriétés d'incidence, maîtrisées par les étudiants en géométrie plane, ne sont pas prises en compte dans les problèmes faisant intervenir des représentations spatiales.

L'essentiel des résultats dégagés à partir de ces tests vient confirmer les résultats énoncés par G. Audibert [1] pour ce qui est de la géométrie plane et ceux de G. Audibert [2] et A. Chevalier [4] pour la géométrie de l'espace.

3°) LA GÉOMÉTRIE DE L'ARCHITECTE.

Existe-t-il, au-delà des modes, une géométrie des architectes ? Lorsqu'on les interroge à ce sujet, les réponses sont très diverses et directement en prise avec leur secteur d'activité.

Ceci peut varier de « la géométrie de l'angle droit » (qui prend appui sur le pavé) à « la géométrie de la représentation » (permettant de réaliser un schéma cohérent d'une situation spatiale) ou bien « la géométrie du triangle » (qui permet d'effecrner des relevés sur le terrain).

Ces points de vue quelque peu réducteurs laissent de côté toutes les possibilités qu'une structuration rigoureuse du plan et de l'espace laissent à l'invention.

Depuis que l'architecte dessine, il n'a jamais cessé d'emprunter à la géométrie.

Aujourd'hui, l'espace est considéré comme son domaine privilégié, et ceci explique sans doute l'importance accordée dans les Écoles d'Architecture aux différentes disciplines mettant en jeu le rapport à l'espace. La géométrie descriptive, l'étude des différentes perspectives, la morphologie, les ateliers de maquettes, se nourrissent de l'espace géométrique proprement dit. Deux exemples évidents : on ne peut circonscrire un cercle par plus de six cercles qui lui sont égaux, ni développer une surface non développable dans le plan. Ceci pour dire qu'on ne peut manipuler l'espace géométrique selon son bon vouloir. Il y a une limitation géométrique propre et ceci reste une **donnée primitive**.

Des systèmes de contraintes autres que l'espace géométrique, retenons principalemenr, pour les registres les plus couramment aperçus et utilisés en architecture, les modes graphiques, cartographiques, topologiques et figuratifs.

Tracer, localiser, explorer, figurer sont des pratiques qui peuvent procéder d'un autre enseignement. Le nôtre s'attache à clarifier les **données primitives** de l'espace géométrique afin d'assurer son transfert par les systèmes de représentation.

Dans les enseignements voisins que sont la géométrie descriptive et la perspective, on constate trop souvent les difficultés des étudiants qui confondent géométrie de l'objet et celle de sa représentation, à aborder ces géométries.

Ils ont tendance à croire que la représentation définira l'objet alors qu'elle ne peut que communiquer - à sa manière - une information présente dans l'espace géométrique, information qu'ils énoncent souvent avec imprécision. Par exemple, un étudiant qui traite de l'intersection d'une droite et d'un plan en géométrie descriptive mémorise un ensemble de procédures qui, en fait, décomposent le problème en intersection de deux plans, puis de deux droites, décompositions trop souvent passées sous silence au bénéfice de routines aussi facilement oubliées qu'apprises.

4°) QUELLE GÉOMÉTRIE POUR L'ÉLÈVE ARCHITECTE ?

Compte tenu de la nature de la population des étudiants de première année à l'EARL et compte tenu également des horaires accordés localement à l'enseignement de la géométrie (en dehors des questions de représentation, les étudiants ont 30 heures de géométrie sur l'année), nous avons dû effectuer des choix sur les contenus à enseigner et sur les méthodes de travail.

Pour ce qui est des méthodes, nous avons opté pour un système que nous appelons cours/T.D où les étudiants sont répartis par groupes inférieurs à 40. Ceci permet une activité plus soutenue de leur part. Nous avons également réalisé un polycopié [3] qui contient l'essentiel des questions abordées et, entre les examens partiels, nous leurs proposons des travaux à réaliser en autonomie que l'on nomme « sujets d'études » dont un exemple figure en annexe 2.

Pour ce qui est des contenus, nous avons privilégié trois thèmes qui nous paraissent incontournables.

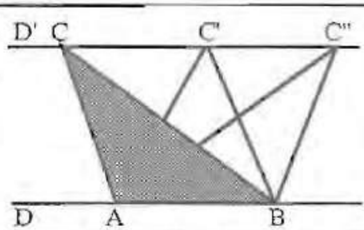
THÈME 1 : FIGURATION ET FORMALISME.

Il s'agit pour l'essentiel d'exploiter visuellement une figure à partir de simples propriétés sur les surfaces, afin d'établir et d'utiliser d'autres propriétés déjà connues ou à découvrir comme les théorèmes de Thalès, de Céva, de Pappus. Nous axons notre travail sur l'aire du triangle et quelques propriétés communément admises à son sujet.

Règle 1. La surface d'un triangle est invariante dans tout déplacement ou retournement. Elle est donnée par $S = \frac{1}{2}bh$ quelles que soient la base b et la hauteur h correspondante.

Règle 2. Si D et D′ sont parallèles, la surface du triangle ABC est indépendante de la position de C sur D′ :

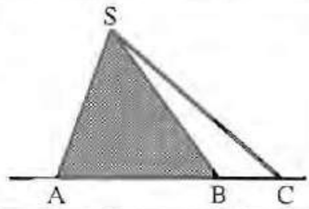
$$S(ABC) = S(ABC') = S(ABC'')$$



Règle 3. Réciproquement, la surface et le côté AB du triangle ABC étant fixés, son troisième sommet C situé d'un côté donné de la droite AB reste sur une droite parallèle à la droite AB.

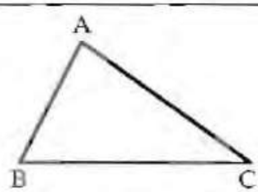
Règle 4. A, B, C étant alignés, les surfaces des triangles ABS et BCS sont dans le rapport de leurs bases AB et BC :

$$\frac{S(ABS)}{S(BCS)} = \frac{AB}{BC}$$



C'est notre point de départ : il uous permet de réconcilier avec la pratique de la géométrie ceux qui ont, pour des raisons diverses, rejeté toute activité mathématique. De plus, il ne les met pas en position de retrait par rapport à ceux qui possèdent déjà une bonne expérience et un usage convenable du langage formel, ce qui favorise leur activité. Ce travail permet à tous d'aborder des exercices dont la solution n'est pas évidente comme les questions suivantes :

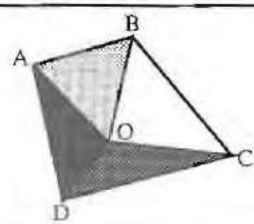
ABC est uu triangle. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que S(ABM) = S(ACM) ?



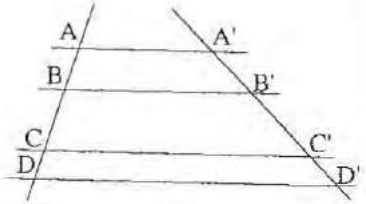
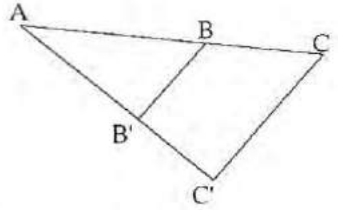
ou encore :

ABCD est un quadrilatère convexe. Peut-on construire à l'intérieur un point O tel que :

S(OAB) = S(OBC) = S(OCD) = S(ODA) ?



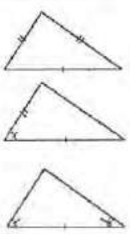
Une fois abordés les divers points de vue sur le théorème de Thalès (d'accès facile par les aires) et le travail sur les proportions qui les accompagne…

Deux points de vue coexistent :	
Lignes proportionnelles	Triangles semblables :
	
Des parallèles déterminent sur des sécantes des segments proportionnels : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'}$... etc.	Si l'on trace une parallèle à un côté d'un triangle, elle détermine deux triangles à côtés proportionnels : $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}$

la similitude vient naturellement servir de synthèse à ces résultats.

THÈME 2 : RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

Ce thème résume les diverses méthodes qui permettent, lorsqu'un triangle est fixé, d'en calculer les divers éléments. Il prend appui sur ce que nous appelons les trois cas d'existence d'un triangle (la majeure partie du travail effectué dans ce chapitre nécessite quelques connaissances et savoir-faire en trigonométrie dont l'essentiel doit être remis en mémoire).



Un triangle est défini (à une isométrie près) :

- soit par ses trois côtés,

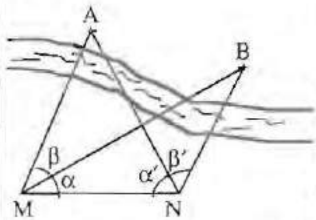
- soit par deux côtés et l'angle qu'ils déterminent,

- soit par deux angles et le côté qui leur est commun.

Les étudiants d'aujourd'hui n'ont pas été formés en géométrie à partir des cas d'égalité (ou de similitude) des triangles : ce sont les isométries et l'homothétie qui constituent le fil conducteur de la géométrie dans l'enseignement obligatoire. Comme le souligne A. Chevalier [4] dans ses conclusions, « la construction d'un triangle n'est pas définitivement acquise par tous les élèves de l'enseignement secondaire ».

L'essentiel du travail sur les relations métriques dans le triangle s'effectue seulement dans les classes de première scientifique alors qu'il s'agit là d'outils de calcul de base pour qui est confronté à des problèmes de relevés sur le terrain.

Notre objectif est que les étudiants acquièrent une certaine autonomie dans le traitement des exercices comme le suivant :



Sur la figure ci-contre, A et B sont deux points inaccessibles dont on veut mesurer la distance. À partir de deux points accessibles M et N dont on connaît la distance d, on relève les angles :

$\widehat{BMN} = \alpha$, $\widehat{BMA} = \beta$, $\widehat{ANM} = \alpha'$, $\widehat{ANB} = \beta'$.
Calculer la distance AB en fonction de d, α, α', β et β'.

THÈME 3 : GÉOMÉTRIE PLANE ET PROBLÈME SPATIAUX.

De nombreux problèmes de géométrie dans l'espace se ramènent souvent à des problèmes de géométrie plane dès lors qu'un « bon plan » dans lequel on va travailler a été mis en évidence.

L'objectif de ce thème est de montrer sur quelques situations simples comment interviennent les résultats déjà obtenus dans les chapitres précédents pour résoudre des problèmes spatiaux.

La plupart des situations rencontrées concernent le cube ou le pavé ; c'est pourquoi les premiers paragraphes traitent des sections planes du cube. Afin de pouvoir effectuer un travail déductif rigoureux, nous procédons à un rappel des principaux résultats de géométrie dans l'espace.

Règles d'incidence :

1) Deux points distincts déterminent une droite et une seule.

2) Trois points non alignés déterminent un plan et un seul (ou bien deux droites distinctes et parallèles déterminent un plan et un seul.)

3) Si deux points distincts sont contenus dans un plan, la droite qu'ils déterminent est entièrement contenue dans ce plan.

4) L'intersection de deux plans distincts est une droite.

5) Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et cela suivant deux droites parallèles.

Règles d'orthogonalité :

1) Denx droites sont orthogonales si leurs parallèles issues d'un même point sont perpendiculaires.

2) Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

3) Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

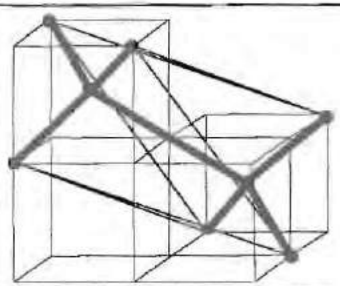
4) Deux plans sont perpendiculaires si une droite de l'un est perpendiculaire à l'autre.

Théorème du toit :

Si un plan parallèle à une droite D coupe deux plans P et P' contenant D suivant deux droites Δ et Δ' respectivement, alors Δ et Δ' sont des droites parallèles à D.

Pour l'essentiel, ces règles sont ignorées des étudiants et, bien souvent, ils ne pensent pas que, même à main levée, un croquis de situation spatiale puisse de certaine façon en dépendre.

Nous tentons alors de leur donner quelques méthodes de recherche qui seront réinvesties aussi bien en géométrie descriptive qu'en perspective. On traite, par exemple, la recherche de l'intersection entre une droite et un plan qui nécessite le choix d'un plan auxiliaire contenant la droite. Ici, l'autonomie des élèves est recherchée pour le traitement des exercices comme celui qui suit :



La structure tubulaire ci-contre (en traits épais) a été créée à partir d'un réseau de cubes de 1m d'arête (en traits fins) et de leur « structure tétraédrique ». Les traits moyens représentent des câbles.

Calculer les longueurs de tube et de câble nécessaires à sa réalisation.

ET APRÈS :

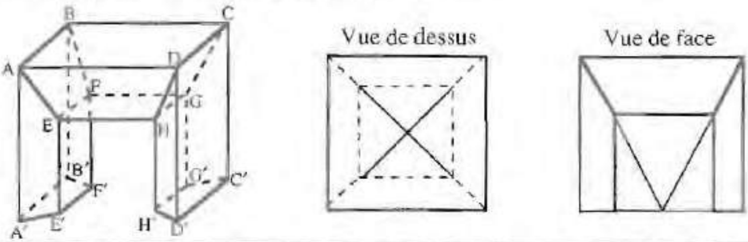
Au-delà de ces trois thèmes qui, répétons-le, nous paraissent incontournables, les sujets qui sont abordés ne sont que des compléments de culture et de pratique pour un architecte qui vont souvent venir comme applications de ce travail.

C'est le cas, par exemple, de l'étude des polygones réguliers, des frises et des pavages du plan. On s'intéresse alors à des problèmes comme :

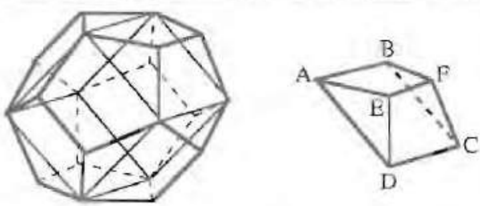
> Peut-on recouvrir une bande de plan ou le plan tout entier à l'aide d'un seul type de polygones réguliers de même taille ?

L'étude des angles dièdres ou trièdres occupe parfois pour l'architecte une place importante ; il peut avoir à traiter le type de question qui suit :

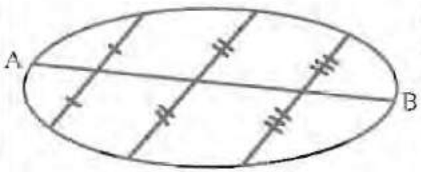
> Les trois dessins ci-dessous représentent une même arche, d'abord en perspective, puis en vue de dessus et vue de face.
> Le volume extérieur ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête a.
> Le volume intérieur EFGHE'F'G'H' est un cube d'arête b, ($b < a$).
> Ces deux cubes ont un même axe de symétrie vertical et leurs faces sout parallèles.
> Calculer l'angle dièdre d'arête AE après avoir calculé successivemeut les cosinus et sinus des angles $\widehat{E'EF}$, $\widehat{AEF}$, $\widehat{AEE'}$.



Nous abordons également l'étude des polyèdres et de quelques pavages de l'espace ; bien sûr, ce sont les polyèdres réguliers qui sont au centre de notre travail, par exemple :

> Ainsi que le montre la figure ci-contre, le dodécaèdre régulier peut être considéré comme l'assemblage de six polyèdres identiques sur chacune des six faces d'un cube.
>
> 
>
>
> Soient c la longueur de l'arête du cube et a celle de l'arête du dodécaèdre.
> On a:
> AB = BC = CD = DA = a et AE = BF = EF = CF = DE = c.
> 1°) Connaissant les angles du polygone régulier, préciser les angles $\widehat{BEA}$, $\widehat{BAE}$, $\widehat{AEF}$, $\widehat{EAD}$. En déduire une relation entre a et c.
> 2°) Calculer les angles dièdres d'arêtes AB, BC et EF.

Nous accordons également une place privilégiée au travail sur l'ellipse pour l'importance qu'elle peut prendre dans les problèmes de représentation alors qu'elle est quasiment ignorée de l'enseignement secondaire. C'est la notion de diamètres conjugués qui permet d'envisager des tracés approchés ; c'est pourquoi, nous proposons :



1°) En utilisant l'affinité, démontrer que les milieux des cordes parallèles d'une ellipse sont alignés et définissent un segment [AB].
2°) Sachant que parmi toutes les cordes parallèles à une corde donnée figure nécessairement un diamètre, démontrer que [AB] et ce diamètre sont deux diamètres conjugués.

Nous proposons en annexes 3 et 4 et, en guise de conclusion, les deux sujets d'examen de l'année 1995/96.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUDIBERT G. *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane. Vol. 1 et 2.* Publication N° 56 de l'A.P.M.E.P, 1982.

[2] AUDIBERT G. (1985) *Une problématique en géométrie de l'espace.* Édition IREM-USTL, Place E. Bataillon, Montpellier, 1985.

[3] BERTHOMIER T., BONAFÉ F. *Géométrie pour l'élève architecte.* Coédition IREM-USTL, Place E. Bataillon, Montpellier et EALR Montpellier, 1995.

[4] CHEVALIER A. *Procédures de constructions de triangles.* Édition IREM-USTL, Place E. Bataillon, Montpellier, 1988.

ANNEXE 1

TEST POUR ABORDER LE COURS DE GÉOMÉTRIE

1°) Développer l'expression algébrique : $(x - y)^2 =$

2°) Mettre sous forme d'un produit de facteurs l'expression : $x^2 - y^2 =$

3°) Donner le lieu des points équidistants de deux points fixes :

Réponse :

Croquis :

4°) Donner la définition d'une **ELLIPSE** :

a) En termes de lieu géométrique :

b) En termes projectifs :

5°) a) Comment détermine-t-on graphiquement le centre de gravité d'un triangle quelconque ?

Réponse :

b) Quelle est sa propriété ?

Réponse :

6°) Figure 1 ci-jointe. Énoncer clairement, à l'aide de termes géométriques élémentaires, la condition nécessaire et suffisante pour que le triangle quelconque, plein, passe par le trou triangulaire quelconque (ces deux triangles étant différents et supposés sans épaisseur).

Réponse :

7°) Figure 2 ci-jointe. Sur une bande de papier rectangulaire, tracer un pli rectiligne (éviter 45° qui est particulier). Dessiner à main levée le plus rigoureusement possible cette bande repliée avec les indications nécessaires et suffisantes pour valider l'exactitude de votre figure.

8°) Figure 3 ci-jointe. Pouvez-vous déterminer graphiquement, à main levée, mais avec précision, sur cette perspective d'un cube posé sur un plan, le point où la droite (D) sort de la face latérale de ce cube ?

Figure 1 (question 6).

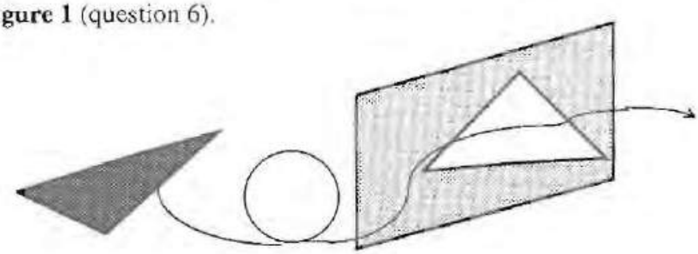


Figure 2 (question 7).

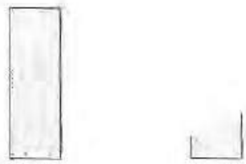
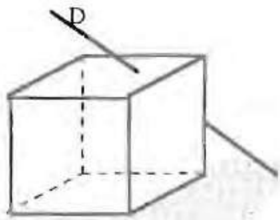


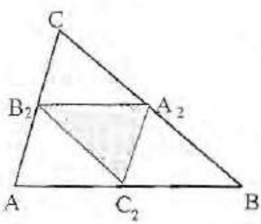
Figure 3 (question 8).

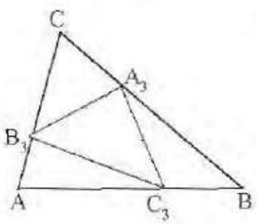


ANNEXE 2

SUJET D'ÉTUDE

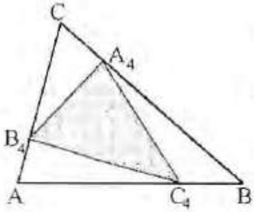
À partir du triangle ABC ci-contre, on construit les triangles $A_2B_2C_2$, puis $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$ ... jusqu'à $A_nB_nC_n$.



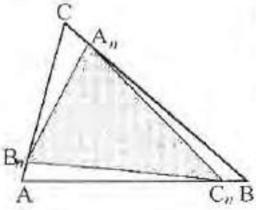


Pour cela :

- On partage les côtés AB, BC, CA, en 2, puis 3, puis 4, ... puis n parties égales.
- On place ensuite A_2 (ou A_3, ou A_4 ... ou A_n) entre C et B de telle sorte que $CA_2 = \frac{1}{2}CB$ (ou $CA_3 = \frac{1}{3}CB$ ou $CA_4 = \frac{1}{4}CB$ ... ou $CA_n = \frac{1}{n}CB$).
- De même, on place B_2 (ou B_3, ou B_4 ... ou B_n) entre A et C de telle sorte que $AB_2 = \frac{1}{2}AC$ (ou $AB_3 = \frac{1}{3}AC$ ou $AB_4 = \frac{1}{4}AC$ ... ou $AB_n = \frac{1}{n}AC$).



- Enfin, on place C_2 (ou C_3, ou C_4 ....ou C_n) entre B et A de telle sorte que $BC_2 = \frac{1}{2}BC$ (ou $BC_3 = \frac{1}{3}BC$ ou $BC_4 = \frac{1}{4}BC$ ... ou $BC_n = \frac{1}{n}BC$).

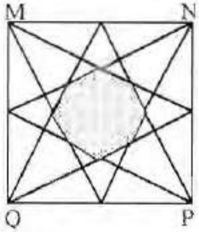


1°) Par des considérations d'aires évaluer le rapport de l'aire de $A_2B_2C_2$ à celle de ABC, puis celui de l'aire de $A_3B_3C_3$ à celle de ABC, enfin celui de l'aire de $A_4B_4C_4$ à celle de ABC.

2°) Évaluer en fonction de n, le rapport de l'aire de $A_nB_nC_n$ à celle de ABC.

ANNEXE 3

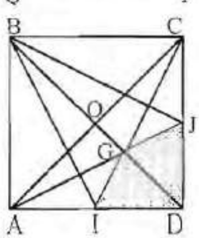
Le problème qui suit est découpé en deux parties. La première est l'étude d'une configuration plaue qui sert de support à la deuxième. Moins qu'une certaine virtuosité dans les calculs, ce qui est attendu ici est la capacité de mobiliser ses connaissances. On comprendra alors que montrer comment on peut faire est aussi digne d'intérêt qu'une suite de calculs laborieux. Il est recommandé de fournir des figures servant de support dans les explications.



<u>**Partie I :**</u> Étude d'une configuration plane.

Sur la figure 1 ci-contre, MNPQ est un carré. L'octogone grisé est obtenu en joignant les sommets du carré aux milieux des côtés opposés.

Le but de cette partie est double : il s'agit d'étudier quelques propriétés de cet octogone et d'évaluer son aire par rapport à celle du carré MNPQ. La méthode proposée consiste à étudier seulement un quart de la figure.



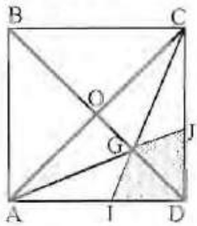
1°) Sur la figure 2 ci-contre, ABCD est un carré de côté c et de centre O. Les points I et J sont les milieux des côtés AD et DC, les droites AJ et BI se coupent en G.

a) Justifier que G est le centre de gravité du triangle ADC.

b) Calculer les longueurs CI, GI, GJ et GD en fonction de c.

c) L'octogone de la figure 1 a-t-il les côtés égaux et les angles égaux?

2°) Évaluer l'aire du quadrilatère DIGJ par rapport à celle du triangle ADC puis du carré ABCD. En déduire le rapport de l'aire de l'octogone de la figure 1 à celle du carré MNPQ.



3°) Sur la figure 3 ci-contre ABCD est un carré de côté c et de centre O. Les points I et J sont sur les côtés AD et DC de sorte que ID = JD ; les droites AJ et CI se coupent en G. On pose ID = JD = x.

a) Justifier que $\dfrac{S(GID)}{S(GAD)} = \dfrac{S(GJD)}{S(GAD)} = \dfrac{S(AJD)}{S(ACD)} = \dfrac{x}{c}$.

b) Des égalités ci-dessns, déduire les égalités suivantes :

$$S(GAD) = \frac{c}{x} S(GJD) = \frac{c}{x} S(GID),$$

$$S(AJD) = S(GAD) + S(GJD) = \left(1 + \frac{c}{x}\right) S(GJD),$$

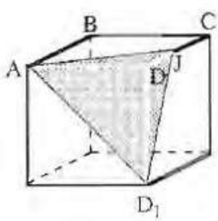
$$\frac{S(GJD)}{S(AJD)} = \frac{x}{x+c}.$$

c) Enfin établir que $\dfrac{S(GJD)}{S(ACD)} = \dfrac{x^2}{xc + c^2}$ er calculer ce rapport lorsque

$x = \dfrac{1}{2} c$.

d) Pour quelle valeur de l'angle $\widehat{CID}$ le triangle GID est-il isocèle en D ? Exprimer alors x en fonction de c.

Partie II : Étude d'une surface vitrée.



1°) La figure 4 ci-contre représente un cube d'arête c. Le point J est un point du segment DC.

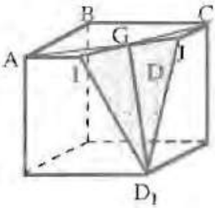
Le triangle grisé AJD_1 représente une surface vitrée permettant l'éclairage de l'intérieur du cube.

a) **On suppose que J est le milieu de DC.**

Justifier que AJD_1 est un triangle isocèle. On appelle H le milieu de AD_1. Calculer en fonction de c les longueurs AD_1 et HJ. Calculer alors l'aire de la surface vitrée en fonction de c.

b) **J n'est plus le milieu de DC, on pose DJ = x.**

Déterminer, en fonction de c, la longueur x pour que l'aire de la surface vitrée soit égale aux deux tiers de l'aire du carré ABCD. Pour quelle valeur de x l'aire de la surface vitrée est-elle égale à la moitié de l'aire de ce carré ?



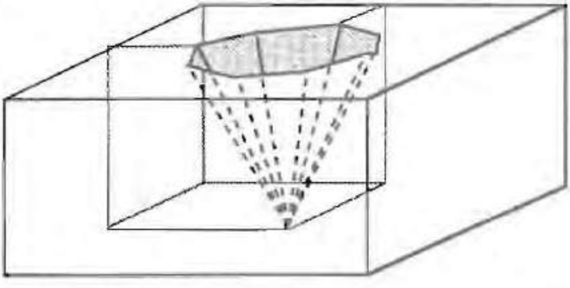
2°) La figure 5 ci-contre représente un cube d'arête c. Les points I et J sont les milieux respectifs de AD et DC.

Les triangles grisés GID_1 et GJD_1 représentent des surfaces vitrées permettant d'éclairer l'intérieur du cube.

Déterminer en fonction de c l'aire totale du vitrage (on pourra s'appuyer sur la position de G dans le triangle ADC pour déterminer l'aire de GJD_1).

3°) La figure 6 qui suit représente un pavé à base carrée de côté $2c$, et de hauteur c. Il est percé en son centre d'une ouverture en forme de pyramide renversée dont la base est un octogone. Cette pyramide a toutes les faces latérales vitrées pour éclairer l'intérieur du pavé.

La face supérieure peut se concevoir comme le dessin de la figure 1, le coin arrière gauche (cube représenté en traits fins) comme la figure 5.

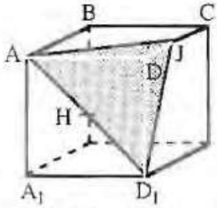


Quelle est en fonction de c la surface de vitrage nécessaire à sa réalisation ? Quelles sont, en fonction de c, les dimensions des huit vitres triangulaires ?

ANNEXE 4

Le travail proposé ici reprend et prolonge celui du partiel de Février. Certains résultats entrevus à cette occasion sont rappelés, d'autres doivent être à nouveau établis.

La partie I traite de diverses questions de longueurs et surfaces. Les parties II et III traitent de questions d'angles à partir des situations étudiées dans la partie I. Un formulaire en fin de texte rappelle quelques formules fondamentales ainsi que quelques valeurs trigonométriques pouvant être utiles.



__Partie I :__ Étude d'une surface vitrée.

La figure 1 ci-contre représente un cube d'arête c. Le point J est un point du segment DC et H est le milieu du segment AD_1.

Le triangle grisé AJD_1 représente une surface vitrée permettant l'éclairage de l'intérieur du cube.

1°) **On suppose que J est confondu avec C.**

Justifier que AJD_1 est un triangle équilatéral. Calculer en fonction de c les longueurs AD_1 et HJ. Calculer ensuite en fonction de c l'aire de la surface vitrée.

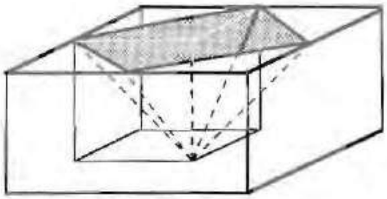
2°) **On suppose que J est le milieu de DC.**

Justifier que AJD_1 est un triangle isocèle. Calculer l'aire de la surface vitrée en fonction de c.

3°) **J est un point quelconque de DC, on pose DJ = x.**

Justifier que $HJ = \sqrt{\dfrac{c^2}{2} + x^2}$ et que l'aire de la surface vitrée est donnée par

$S = \dfrac{c}{2}\sqrt{c^2 + 2x^2}$.

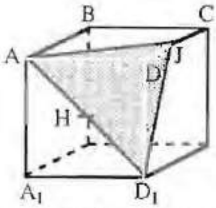


__Partie II :__ Étude d'un puits de lumière.

La figure 2 ci-contre représente un pavé à base carrée de côté $2c$, et de hauteur c. Il est percé en son centre d'une ouverture en forme de pyramide renversée dont la base est un carré. Cette pyramide a toutes les faces latérales vitrées pour éclairer l'intérieur du pavé.

Le coin arrière gauche peut se concevoir comme le dessin de la figure 1, (représenté en traits fins) lorsque J est en C.

L'objet de cette partie est l'étude des deux angles dièdres que forment la face de dessus avec une des surfaces vitrées d'une part et deux surfaces vitrées adjacentes entre elles d'autre part.



1°) Calcul de l'angle dièdre que forme la face de dessus avec une surface vitrée: **dièdre d'arête AC.**

La figure 3 ci-contre reprend la figure 1. Pour des raisons de symétrie évidentes, ce dièdre est identique à ceux d'arêtes AD_1 et CD_1.

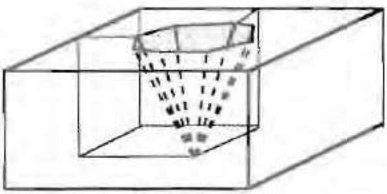
Justifier brièvement que les droites HC et AD_1, puis HA_1 et AD_1 sont perpendiculaires.

Calculer les longueurs A_1H et A_1C en fonction de c. À l'aide de la formule donnée en 1-3), préciser la longueur HC en fonction de c. Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{A_1HC}$ et donner une valeur approchée du dièdre d d'arête AC.

2°) Calcul de l'angle dièdre que forment deux surfaces vitrées adjacentes entre elles.

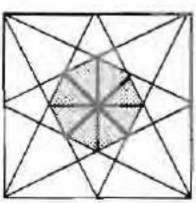
L'angle dièdre entre les faces AA_1D_1 et AD_1C étant supposé connu et égal à d, exprimer en fonction de d l'angle dièdre de deux surfaces vitrées adjacentes.

Partie III : Étude d'un autre puits de lumière.



La figure 4 ci-contre représente un pavé à base carrée de côté $2c$ et de hauteur c. Il est percé en son centre d'une ouverture en forme de pyramide renversée dont la base est un octogone.

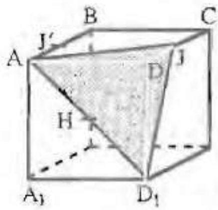
Cette pyramide a toutes les faces latérales vitrées pour éclairer l'intérieur du pavé. Le coin arrière gauche (représenté en traits fins) peut se concevoir comme la figure 1.



La figure 5 ci-contre représente à une autre échelle la vue de dessus.

L'objet de cette partie est l'étude des divers angles dièdres que forment la face de dessus avec une surface vitrée d'une part et deux surfaces vitrées adjacentes entre elles d'autre part.

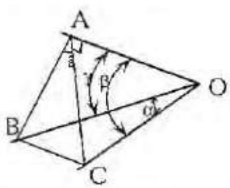
1°) Calcul de l'angle dièdre que forme la face de dessus avec une surface vitrée : **dièdre d'arête AJ**.



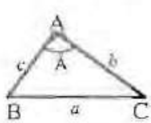
La figure 6 ci-contre reprend la figure 1 ; on a placé le milieu J′ du segment AB. Pour des raisons de symétrie évidentes, ce dièdre est identique à celui d'arête JD_1. On considère le trièdre de sommet A et d'arêtes AJ, AB, AD_1.
Calculer les longueurs AH et AJ en fonction de c. A l'aide de la formule donnée en I-3) préciser la longueur HJ en fonction de c. Calculer alors les sinus et cosinus des angles $\widehat{D_1AJ}$, $\widehat{JAB}$, $\widehat{D_1AB}$ et déterminer la valeur du cosinus du dièdre d'arête AJ. Donner une valeur approchée de ce dièdre d_1.

2°) Calcul de l'angle dièdre que forment deux surfaces vitrées adjacentes.
a) On considère le trièdre de sommet A et d'arêtes AJ, AA_1, AD_1. A l'aide des calculs effectués ci-dessus et des valeurs des sinus et cosinus de l'angle $\widehat{A_1AJ}$, déterminer la valeur du cosinus du dièdre d'arête AD_1. Donner une valeur approchée de ce dièdre d_2.
b) Les angles d_1 et d_2 des dièdres d'arêtes respectives AJ et AD_1 étant supposés connus. Calculer en fonction de d_1 et d_2 un des angles dièdres que peuvent former deux surfaces vitrées adjacentes suivant leur situation. Donner une méthode permettant d'obtenir l'autre. On rappelle à ce sujet que lors du premier partiel il a été établi que l'octogone servant de base au puits de lumière n'était pas un octogone régulier bien que les longueurs de ses côtés soient toutes égales à AJ/3 .

FORMULAIRE



$$\cos \hat{a} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta \times \cos\gamma}{\sin\beta \times \sin\gamma}$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$