Dans nos classes Lycée Professionnel

Voyage hasardeux dans un filtre réjecteur

Groupe Mathématiques du signal
IREM d'Aquitaine*

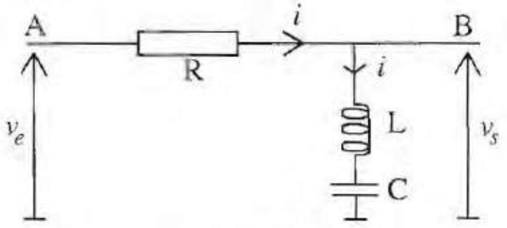
BAC. PRO. MAVÉLEC. *SESSION 1996*

ÉPREUVE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE - E2 partie A

ÉTUDE THÉORIQUE DE FONCTION

Énoncé du sujet

On relève sur le schéma structurel du magnétoscope THOMSON R 3000, dans la chaîne du traitement de la luminance en enregistrement, la structure suivante : (figure 1)



$R = 1{,}5\ k\Omega$

$L = 100\ \mu H$

$C = 10\ pF$

(figure 1)

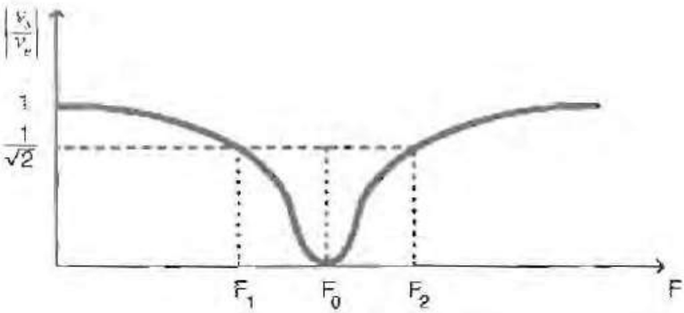
* F. BALEMBITS, professeur agrégé de mathématiques à l'IUT d'Agen
R. BOUDIE, professeur de physique appliquée en classe de Tech. Sup. Électronique au Lycée J.B. de Baudre d'Agen
S. DUPUY professeur honoraire, agrégé de mathématiques
M. PUJOS professeur agrégé de mathématiques à l'Université Bordeaux I
J. RIVOAL, plp2 de math-physique en section de MAVÉLEC au lycée professionnel Jean Monet de Foulayronnes (47)

C'est un filtre de réjection de fréquence centrale F_0.

PARTIE I : Calcul de la fréquence F_0 (8 points)

I.1. Montrer que le module de $\left|\frac{v_s}{v_e}\right|$ s'écrit de la forme suivante :

$\left|\frac{v_s}{v_e}\right| = \frac{1-LC\omega^2}{\sqrt{\left(1-LC\omega^2\right)^2+R^2C^2\omega^2}}$. La courbe de en fonction de ω ou de F est donnée ci-dessous :

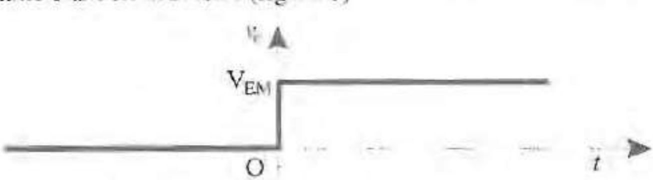


F_0 étant la fréquence pour laquelle $\left|\frac{v_s}{v_e}\right| = 0$, F_1 et F_2 étant les fréquences pour lesquelles $\left|\frac{v_s}{v_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

I.2. Calculer la valeur F_0 (6 points)

PARTIE II : Réponse indicielle du filtre.

Sur la figure 1, et lors de la mise sous tension en enregistrement, la tension en A, et en continu, passe de 0 V à V_{EM}. On peut considérer cette variation comme étant un échelon : (figure 2)



On suppose V_{EM} connue. L'objectif est d'écrire l'équation de la réponse à cet échelon du filtre.

Travail demandé :

II.1. (8 points)

Montrer que l'équation différentielle qui lie v_s et v_e en fonction de R, L et C s'écrit :

$$\mathrm{LC}\frac{d^2v_s}{dt^2}+\mathrm{RC}\frac{dv_s}{dt}+v_s=\mathrm{LC}\frac{d^2v_e}{dt^2}+v_e.$$

Le choix de la méthode est laissé au candidat entre les deux démarches suivantes :

Première méthode :

II.1.1. Exprimer i en fonction de v_s, v_e et R.

II.1.2. Exprimer l'équation différentielle qui lie v à i, L et C.

II.1.3. Déduire de II.1.1 et II.1.2 l'équation demandée en II.1.

Deuxième méthode :

II.1.1. Ecrire l'expression complexe $\dfrac{v_e}{v_s}$.

II.1.2. Remplacer $\mathrm{J}\omega$ par $\dfrac{d}{dt}$. Comparer avec l'équation demandée en II.1.

II.2. (10 points)

Exprimer la solution générale de cette équation différentielle sans second membre.

Application numérique.

II.3. (4 points)

Exprimer v_{sp}, solution particulière correspondant à l'échelon donné ($v_e = \mathrm{V_{EM}}$).

Corrigé officiel distribué aux examinateurs

Partie I : Calcul de la fréquence $\mathrm{F_0}$.

I.1. (8 points)

$$\frac{v_s}{v_e}=\frac{\mathrm{j}\mathrm{L}\omega+\dfrac{1}{\mathrm{jC}\omega}}{\mathrm{R}+\mathrm{jL}\omega+\dfrac{1}{\mathrm{jC}\omega}}=\frac{1-\mathrm{LC}\omega^2}{\mathrm{jRC}\omega+1-\mathrm{LC}\omega^2}$$

d'où

$$\left|\frac{v_s}{v_e}\right|=\frac{1-\mathrm{LC}\omega^2}{\sqrt{\left(1-\mathrm{LC}\omega^2\right)^2+\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}}.$$

I.2. (6 points)

F_0 étant la valeur pour que $\left|\frac{v_s}{v_e}\right| = 0$, alors

$$1 - LC\omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-15}}},$$

d'où

$$F_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-15}}} \approx 5{,}03 \text{ MHz}.$$

Partie II : Réponse indicielle du filtre.

II.1. Première méthode.

II.1.1. $i = \frac{v_e - v_s}{R}$ (2 points)

II.1.2. $v_s = L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$ (2 points)

II.1.3. (4 points)

$\frac{dv_s}{dt} = L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i$ (d'après II.1.2.),

$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv_e}{dt} - \frac{1}{R}\frac{dv_s}{dt}$ et $\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{d^2v_e}{dt^2} - \frac{1}{R}\frac{d^2v_s}{dt^2}$ (d'après II.1.1.),

d'où

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{L}{R}\frac{d^2v_e}{dt^2} - \frac{L}{R}\frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{v_e}{RC} - \frac{v_s}{RC};$$

$$\frac{L}{R}\frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{RC} = \frac{L}{R}\frac{d^2v_e}{dt^2} + \frac{v_e}{RC}$$

ou bien

$$LC\frac{d^2v_s}{dt^2} + RC\frac{dv_s}{dt} + v_s = LC\frac{d^2v_e}{dt^2} + v_e.$$

II.1. Deuxième méthode.

II.1.1. $\frac{v_s}{v_e} = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1 + j^2LC\omega^2}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}$ (4 points)

II.1.2. $\dfrac{v_s}{v_e} = \dfrac{1 + \dfrac{d^2}{dt^2}\mathrm{LC}}{1 + \mathrm{RC}\dfrac{d}{dt} + \mathrm{LC}\dfrac{d^2}{dt^2}}$

d'où :

$v_s + \mathrm{RC}\dfrac{dv_s}{dt} + \mathrm{LC}\dfrac{d^2v_s}{dt^2} = v_e + \mathrm{LC}\dfrac{d^2v_e}{dt^2}$ (4 points)

II.2. (10 points)

L'équation sans second membre s'écrit : $\mathrm{LC}\dfrac{d^2v_s}{dt^2} + \mathrm{RC}\dfrac{dv_s}{dt} + v_s = 0$.

L'équation caractéristique sera : $\mathrm{LC}x^2 + \mathrm{RC}x + 1 = 0$ avec $\mathrm{LC} = 10^{-15}$ et $\mathrm{RC} = 1{,}5 \times 10^{-8}$ d'où $10^{-15}x^2 + 1{,}5 \cdot 10^{-8}x + 1 = 0$ et $\Delta < 0$. Deux racines imaginaires et la solution générale s'écrit :

$v_{sg}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\mathrm{A}\cos\omega t + \mathrm{B}\sin\omega t)$

avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = -7{,}5 \cdot 10^6$ et $\omega = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 3{,}072 \cdot 10^7$.

II.3. (4 points)

La solution particulière est de même forme que le second membre. Dans ce problème la solution particulière est $v_{sp} = \mathrm{V_{EM}}$.

NOS REMARQUES

I. Où l'on confond fonctions à valeurs réelles et nombres imaginaires

Dans tout le texte, il y a confusion entre les fonctions réelles du temps et les grandeurs complexes associées lorsque les fonctions réelles sont sinusoïdales. Par exemple : confusion entre $v_e = \hat{\mathrm{V}}_e\cos(\omega t + \varphi_e)$ *et* $\underline{\mathrm{V}_e} = \hat{\mathrm{V}}_e(\cos\varphi_e + \mathrm{j}\sin\varphi_e)$.

En effet, les notations v_s et v_e sont utilisées pour représenter les fonctions réelles du temps dans le schéma, la figure 2, l'équation différentielle du II.1., les questions II.1.1, II.1.2 (première méthode), II.3, mais aussi pour représenter les grandeurs complexes au I.1, au II.1.1 (deuxième méthode).

Il fallait pour éviter ces confusions utiliser, comme cela se fait habituellement, des notations différentes. $\underline{\mathrm{V}_e}$ *et* $\underline{\mathrm{V}_s}$ *sont les notations courantes pour* *ces grandeurs complexes*. De plus dans l'introduction il était souhaitable de donner des précisions à propos de v_e , v_s car l'utilisation des grandeurs complexes associées n'a de sens que si les signaux utilisés sont des fonctions sinusoïdales ce qui n'est jamais explicitement dit dans la partie I et qui n'est pas le cas dans la partie II.

Au I.1., demander le module de $\left|\frac{v_s}{v_e}\right|$ *revient à demander le module d'un module.*

D'autre part demander le module de $\frac{v_s}{v_e}$ *n'a guère d'intérêt si, comme le laisse supposer la figure 1,* v_s *et* v_e *sont des fonctions réelles. En fait l'intention de l'auteur était de demander* $\left|\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}\right|$.

Par ailleurs, aucune indication sur ω n'étant donnée, $1-LC\omega^2$ n'est pas nécessairement une quantité positive et l'expression du module donnée dans le texte est donc fausse. Il aurait fallu écrire $\left|1-LC\omega^2\right|$.

Enfin, la rédaction de cette partie I.1. du texte aurait mérité plus de soins, voir en effet les expressions « s'écrit de la forme » et « la courbe de en fonction ».

II Où l'on demande aux équations différentielles plus qu'elles ne peuvent donner

Dans la partie II, le texte qui précède II.1 est confus et imprécis, la représentation graphique de la fonction échelon incorrecte (que vaut $v_e(0)$?). On aurait dû préciser que la fonction v_e continue, est modélisée par un échelon (fonction non continue en zéro) et définir clairement cette fonction échelon.

De plus pour la partie II.1 l'hypothèse que l'entrée v_e *est modélisée par une fonction échelon est totalement inutile et n'est pas utilisée. Toute cette partie introductive placée en II.1 aurait donc dû trouver logiquement sa place entre la partie II.1 et la partie II.2. Par ailleurs, dans cette partie II, l'objectif est de trouver la réponse du filtre et non comme cela est demandé l'équation de la réponse.*

Il est à noter que pour que l'équation différentielle du II.1 ait un sens il faut que les fonctions v_s et v_e soient deux fois continûment dérivables sur l'intervalle sur lequel on veut résoudre cette équation. Ceci est probablement difficile à formuler pour des élèves de Bac. Pro. Peut être aurait-on pu préciser que l'on supposait les fonctions v_e, v_s, $\frac{dv_e}{dt}$, $\frac{dv_s}{dt}$, $\frac{d^2v_e}{dt^2}$, $\frac{d^2v_s}{dt^2}$, dérivables sur l'intervalle considéré (pour $t \geq 0$) ?

Enfin l'équation différentielle seule ne représente pas le système physique considéré, il fallait aussi donner les conditions initiales liées au système physique et au signal d'entrée v_e.

III <u>Où l'on se livre à de louches manipulations</u>

La deuxième méthode donnée en II.1 nous semble totalement condamnable et à rejeter entièrement. Une justification correcte de la technique que l'on paraît vouloir utiliser ici nécessite, pour le moins, la connaissance de la transformation de Laplace (voir plus loin).

Mais si on voulait à tout prix faire de la cuisine mathématique, il aurait fallu poser, par exemple, le problème de la manière suivante : en utilisant l'expression de $\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ obtenue dans II.1.1 que l'on mettra sous la forme $\alpha(\omega)\underline{V}_s = \beta(\omega)\underline{V}_e$ (α et β fonctions de ω), puis en remplaçant $j\omega\underline{V}_e$ par $\frac{dv_e}{dt}$, $j\omega\underline{V}_s$ par $\frac{dv_s}{dt}$, $(j\omega)^2\underline{V}_e$ par $\frac{d^2v_e}{dt^2}$, $(j\omega)^2\underline{V}_s$ par $\frac{d^2v_s}{dt^2}$ retrouver l'équation donnée en II.1.

Un élève de Bac. Pro. sachant calculer les dérivées des fonctions élémentaires et connaissant le sens des opérateurs $\frac{d}{dt}$ et $\frac{d^2}{dt^2}$ a dû être troublé lorsqu'il est écrit : remplacer $j\omega$ par $\frac{d}{dt}$. De plus lorsqu'il est écrit « remplacer $j\omega$ par $\frac{d}{dt}$ », faut-il comprendre que l'on doit remplacer $(j\omega)^2$ par $\left(\frac{d}{dt}\right)^2$?

Par ailleurs il est à noter que le corrigé propose pour cette question une réponse absurde et totalement condamnable en Mathématiques. *En effet que signifie par exemple l'expression* $\frac{v_s}{v_e} = \frac{1+\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{LC}}{1+\mathrm{RC}\frac{d}{dt}+\mathrm{LC}\frac{d^2}{dt^2}}$?

D'autre part sachant que LC *est constant,* $\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{LC}$ *peut être pris selon son sens habituel (peut être à des parenthèses près) pour la dérivée seconde de* LC, *donc* $1+\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{LC}=1$.

IV **Quelques explications**

On utilise en fait le phénomène suivant. Le système étant caractérisé par sa fonction de transfert isomorphe H telle que :

$$\mathrm{H}(p)=\frac{1+\mathrm{LC}p^2}{1+\mathrm{RC}p+\mathrm{LC}p^2}$$

définie pour tout $p\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(p)>\frac{-\mathrm{R}}{2\mathrm{L}}$, alors un signal d'entrée

$$e(t)=\hat{\mathrm{V}}_e\exp(\mathrm{j}\omega t+\varphi_e)=\underline{\mathrm{V}}_e\exp(\mathrm{j}\omega t)$$

est uu signal propre admissible qui donne la sortie

$$s(t)=\hat{\mathrm{V}}_s\exp(\mathrm{j}\omega t+\varphi_s)=\underline{\mathrm{V}}_s\exp(\mathrm{j}\omega t)=\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega)\,e(t),$$

donc

$$\frac{s(t)}{e(t)}=\frac{\underline{\mathrm{V}}_s}{\underline{\mathrm{V}}_e}=\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega).$$

Dans le cas général d'un signal d'entrée causal v_e admettant une transformée de Laplace $\mathrm{V}_e(p)$, on a $\mathrm{V}_s(p)=\mathrm{H}(p)\,\mathrm{V}_e(p)$ où $\mathrm{V}_s(p)$ est la transformée de Laplace de la sortie v_s. On a

$$\mathrm{V}_s(p)=\frac{1+\mathrm{LC}p^2}{1+\mathrm{RC}p+\mathrm{LC}p^2}\,\mathrm{V}_e(p)$$

soit

$$\left(1+\mathrm{RC}p+\mathrm{LC}p^2\right)\mathrm{V}_s(p)=\left(1+\mathrm{LC}p^2\right)\mathrm{V}_e(p).$$

Lorsque v_s et v_e sont deux fois continûment dérivables cette relation est équivalente à l'ensemble des propositions contenant les conditions initiales, la continuité des fonctions v_s et $\frac{dv_s}{dt}$ et l'équation :

$$\mathrm{LC}\frac{d^2v_s}{dt^2}+\mathrm{RC}\frac{dv_s}{dt}+v_s=\mathrm{LC}\frac{d^2v_e}{dt^2}+v_e.$$

Dans le cas où l'entrée est modélisée par la fonction échelon v_e de la figure 2, on a : $V_e(p) = \dfrac{V_{EM}}{p}$ et $V_s(p) = \dfrac{1+LCp^2}{1+RCp+LCp^2}\dfrac{V_{EM}}{p}$. D'après le théorème de la valeur initiale : $v_s(0) = \lim\limits_{p \to +\infty} pV_s(p) = V_{EM}$.

Si $\mathcal{L}$ est la transformation de Laplace

$$\mathcal{L}\left(\frac{dv_s}{dt}\right)(p) = pV_s(p) - v_s(0) = \frac{-RCpV_{EM}}{1+RCp+LCp^2}$$

et

$$\left(\frac{dv_s}{dt}\right)(0) = \lim_{p \to +\infty} p\mathcal{L}\left(\frac{dv_s}{dt}\right)(p) = \frac{-R}{L}V_{EM}$$

Enfin la question II.3 telle qu'elle est posée n'a pas de sens. Si l'entrée est l'échelon donné, l'équation s'écrit pour $t \geq 0$:

$$LC\frac{d^2v_s}{dt^2} + RC\frac{dv_s}{dt} + v_s = V_{EM}.$$

Cette équation a une infinité de solutions qui sont de la forme :

$$v_s(t) = \exp(\alpha t) \times (A\cos\omega t + B\sin\omega t) + V_{EM}.$$

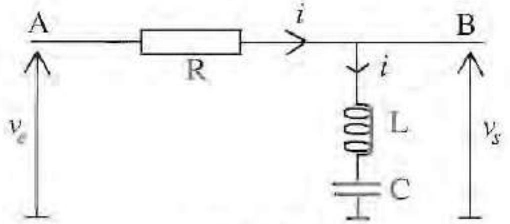
Il y a donc une infinité de solutions particulières « correspondant à l'échelon donné » et non une comme l'indique l'énoncé. Faire trouver V_{EM} *en tant que solution particulière n'a d'intérêt que si on demande toutes les solutions de l'équation différentielle.*

De plus, la réponse du filtre à l'échelon n'est pas demandée contrairement à ce qui est dit dans l'introduction de la partie II (voir plus haut). Pour cela, il aurait fallu donner les conditions initiales correspondant au système physique étudié : $v_s(0) = V_{EM}$ *et* $\left(\dfrac{dv_s}{dt}\right)(0) = -\dfrac{R}{L}V_{EM}$.

PROPOSITION D'UNE NOUVELLE RÉDACTION DU SUJET AVEC SON CORRIGÉ

Énoncé du sujet

On relève sur le schéma structurel du magnétoscope THOMSON R 3000, dans la chaîne du traitement de la luminance en enregistrement, la structure suivante (figure 1) :



R = 1,5 kΩ

L = 100 µH

C = 10 pF

(figure 1)

v_e et v_s sont des fonctions réelles du temps.

Si on étudie le circuit en régime sinusoïdal permanent :

$$v_e = \hat{V}_e \cos(\omega t + \varphi_e)$$

et

$$v_s = \hat{V}_s \cos(\omega t + \varphi_s) .$$

C'est alors un filtre de réjection de fréquence centrale F_0.

On notera

$$\underline{V_e} = \left[\hat{V}_e, \varphi_e\right] = \hat{V}_e(\cos\varphi_e + j\sin\varphi_e)$$

la grandeur complexe associée à v_e. On notera

$$\underline{V_s} = \left[\hat{V}_s, \varphi_s\right] = \hat{V}_s(\cos\varphi_s + j\sin\varphi_s)$$

la grandeur complexe associée à v_s. Si on note $\varphi = \varphi_s - \varphi_e$ et si on choisit $\varphi_e = 0$, alors

$$\underline{V_e} = \left[\hat{V}_e, 0\right] = \hat{V}_e$$

et

$$\underline{V_s} = \left[\hat{V}_s, \varphi\right] = \hat{V}_s(\cos\varphi + j\sin\varphi) .$$

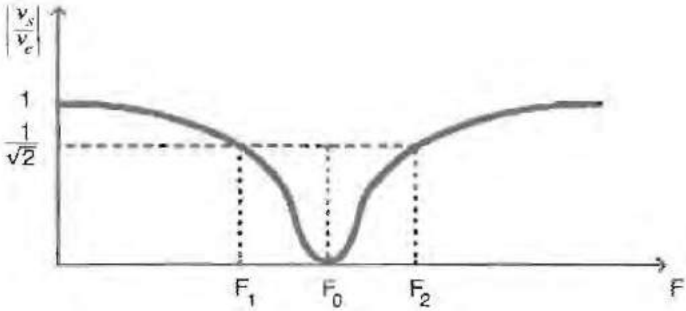
<u>Partie I</u> : Calcul de la fréquence F_0.

I.1. Montrer que le module de $\dfrac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$ s'écrit :

$$\left|\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}\right| = \frac{\left|1 - LC\omega^2\right|}{\sqrt{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

avec $\omega = 2\pi F$.

La représentation graphique de $\left|\dfrac{V_s}{V_e}\right|$ en fonction de F est donnée ci-dessous :



F_0 étant la fréquence pour laquelle $\left|\dfrac{V_s}{V_e}\right| = 0$ et F_1 et F_2 étant les fréquences pour lesquelles $\left|\dfrac{V_s}{V_e}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

I.2. Calculer la valeur de F_0. Application numérique avec R = 1,5 KΩ, L = 100 µH, C = 10 pF.

Partie II : Réponse indicielle du filtre.

Travail demandé :

II.1. On se propose d'écrire l'équation différentielle (E) liant v_e et v_s.

II.1.1. Exprimer i en fonction de v_e, v_s et R.

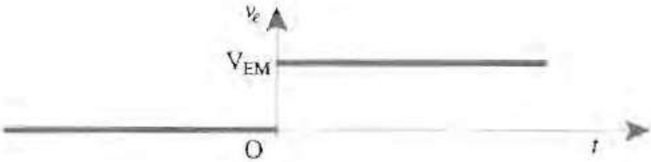
II.1.2. Exprimer v_s, puis $\dfrac{dv_s}{dt}$ en fonction L, C et i.

II.1.3. Déduire du 1.1. et du 1.2. que l'équation (E) s'écrit :

$$LC\frac{d^2v_s}{dt^2} + RC\frac{dv_s}{dt} + v_s = LC\frac{d^2v_e}{dt^2} + v_e\,.$$

II.2. À l'entrée du filtre représenté sur la figure 1, et lors de la mise sous tension en enregistrement, la tension v_e passe de 0 à V_{EM}. La variation de v_e est continue mais on peut la modéliser par un échelon :

$$v_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ V_{EM} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$



(figure 2)

On suppose V_{EM} connue. L'objectif est de trouver la répouse du filtre à cet échelon.

Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$LC\frac{d^2v_s}{dt^2}+RC\frac{dv_s}{dt}+v_s=0$$

dans le cas où R = 1,5 KΩ, L = 100 μH, C = 10 pF.

II.3. Montrer que la solution générale sur $[0,+\infty[$ de l'équation différentielle (E) lorsque $v_e = V_{EM}$ pour $t \geq 0$ est définie par :

$$v_s(t) = V_{EM} + \exp\left(-7,5\times 10^6 t\right)$$
$$\times\left(A\cos\left(3,072\times 10^7 t\right)+B\sin\left(3,072\times 10^7 t\right)\right).$$

II.4. Les conditions initiales que vérifie l'équation (E) pour le système physique donné sont : $v_s(0) = V_{EM}$ et $\frac{dv_s}{dt}(0) = -\frac{RV_{EM}}{L}$.

Trouver pour $t \geq 0$, la solution particulière qui vérifie ces conditions initiales. Cette solution est la réponse v_s du filtre à l'entrée v_e définie en II.2.

Corrigé

Partie I : Calcul de la fréquence F_0.

I.1. Les impédances complexes associées aux différents éléments du circuit sont : $\underline{Z_R} = R$, $\underline{Z_L} = jL\omega$, $\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$.

D'où :

$$\underline{Z_s} = \underline{Z_L}+\underline{Z_C} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

et

$$\underline{Z_e} = \underline{Z_L} + \underline{Z_R} + \underline{Z_C} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}.$$

Puisque $\underline{V_s} = \underline{Z_s} \times \underline{I}$ et $\underline{V_e} = \underline{Z_e} \times \underline{I}$, on a :

$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\underline{Z_s}}{\underline{Z_e}} = \frac{jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)} = \frac{1 - LC\omega^2}{jRC\omega + 1 - LC\omega^2}.$$

En calculant le module, on obtient :

$$\left|\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}\right| = \frac{\left|1 - LC\omega^2\right|}{\sqrt{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + R^2C^2\omega^2}}.$$

I.2. On sait que $\omega_0 > 0$,

$$\left|\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}\right| = 0 \Leftrightarrow 1 - LC\omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-15}}}$$

et

$$F_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-15}}} = 5{,}03 \text{ MHz}.$$

Partie II : Réponse indicielle du filtre.

II.1.1. La tension aux bornes de R est donnée par : $u_R = v_e - v_s = Ri$, d'où $i = \dfrac{v_e - v_s}{R}$.

II.1.2. Première solution : Soit u_L la tension aux bornes de L et u_C la tension aux bornes de C. On a donc

$$v_s = u_L + u_C.$$

Or

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

et

$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx + u_C(0).$$

Il en résulte que :

$$v_s = \mathrm{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{\mathrm{C}}\int_0^t i(x)dx + u_\mathrm{C}(0),$$

d'où

$$\frac{dv_s}{dt} = \mathrm{L}\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{\mathrm{C}}i.$$

Deuxième solution : $v_s = u_\mathrm{L} + u_\mathrm{C}$ et $i = \dfrac{dq}{dt}$. Or

$$u_\mathrm{L} = \mathrm{L}\frac{di}{dt} = \mathrm{L}\frac{d^2q}{dt^2}$$

et

$$u_\mathrm{C} = \frac{1}{C}q + u_\mathrm{C}(0).$$

Donc

$$v_s = \mathrm{L}\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q + u_\mathrm{C}(0)$$

et

$$\frac{dv_s}{dt} = \mathrm{L}\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i.$$

II.1.3. Puisque $i = \dfrac{v_e - v_s}{\mathrm{R}}$, on a

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{dv_e}{dt} - \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{dv_s}{dt}$$

et

$$\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d^2v_e}{dt^2} - \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d^2v_s}{dt^2}.$$

En remplaçant dans

$$\frac{dv_s}{dt} = \mathrm{L}\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{\mathrm{C}}i,$$

on obtient :

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\frac{d^2v_e}{dt^2} - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{v_e}{\mathrm{RC}} - \frac{v_s}{\mathrm{RC}}.$$

Puis en ordonnant :

$$\frac{L}{R}\frac{d^2v_s}{dt^2}+\frac{dv_s}{dt}+\frac{v_s}{RC}=\frac{L}{R}\frac{d^2v_e}{dt^2}+\frac{v_e}{RC},$$

d'où

$$LC\frac{d^2v_s}{dt^2}+RC\frac{dv_s}{dt}+v_s=LC\frac{d^2v_e}{dt^2}+v_e.$$

II.2. L'équation sans second membre est :

$$LC\frac{d^2v_s}{dt^2}+RC\frac{dv_s}{dt}+v_s=0.$$

Puisque $R=1,5\ \mathrm{k\Omega}$, $L=100\ \mathrm{\mu H}$, $C=10\ \mathrm{pF}$, on a : $LC=10^{-15}$ et $RC=1,5\times10^{-8}$. La solution générale v_s de l'équation sans second membre est :

$$v_s(t)=\exp\left(-7,5\times10^6t\right)\times\left(A\cos\left(3,072\times10^7t\right)+B\sin\left(3,072\times10^7t\right)\right).$$

II.3. Si, pour tout $t\geq0$, $v_e=V_{EM}$, alors l'équation s'écrit :

$$LC\frac{d^2v_s}{dt^2}+RC\frac{dv_s}{dt}+v_s=V_{EM}.$$

Une solution particulière de cette équation est donc $v_s=V_{EM}$. La solution générale de cette équation différentielle est donc définie par :

$$v_s(t)=V_{EM}+\exp\left(-7,5\times10^6t\right)\times\left(A\cos\left(3,072\times10^7t\right)+B\sin\left(3,072\times10^7t\right)\right).$$

II.4. Cherchons la solution particulière vérifiant les conditions initiales données :

$$v_s(0)=V_{EM}\Leftrightarrow A=0$$

et

$$\frac{dv_s}{dt}(0)=-\frac{RV_{EM}}{L}\Leftrightarrow B=-0,5\,V_{EM}.$$

La réponse v_s du filtre à cet échelon est donc définie pour tout $t\geq0$ par :

$$v_s(t)=V_{EM}\left(1-0,5\exp\left(-7,5\times10^6t\right)\times\sin\left(3,072\times10^7t\right)\right).$$