Dans nos classes
Lycée

Composée d'homothéties et théorème de Ménélaüs

Richard Blavy
Lycée Agricole, Toulouse

Le théorème de Ménélaüs

Avec les notations de la figure ci-après, rappelons le théorème de Ménélaüs[1] :

Les trois points I, J et K, pris respectivement sur les droites distinctes BC, CA et AB (privées des points A, B, C) sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} \times \frac{\overline{JC}}{\overline{JA}} \times \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = 1.$$

L'utilisation d'homothéties dont les rapports sont précisément ceux de ce théorème permet de l'exprimer simplement.

Une présentation sans mots[2], par enrichissement de la figure, guidera une démonstration. Quelques commentaires l'expliciteront.

On considère les homothéties h_I, h_J, h_K :
h_I, de centre I, envoie B sur C,
h_J, de centre J, envoie C sur A,

[1] Un prochain Bulletin traitera, dans le même esprit, du théorème de Céva.

[2] Cf. l'article de J.P. Delahaye, dans le numéro de février 1998 de « Pour la Science », à propos des « démonstrations sans mots », jeu développé par diverses revues mathématiques aux USA.

h_K, de centre K, envoie A sur B.
$h = h_K \circ h_J \circ h_I$ envoie donc le point B sur le point B. Donc h est l'application identique, ou bien une homothétie de centre B.

Théorème. Les points I, J et K sont alignés si et seulement si $h = h_K \circ h_J \circ h_I$ est l'application identique.

Schéma de la démonstration du théorème direct

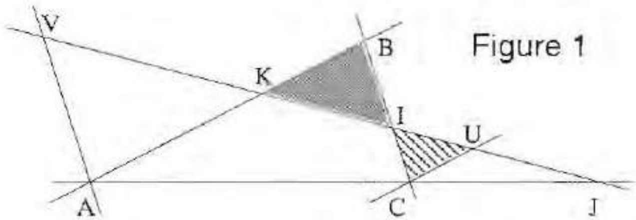

Figure 1

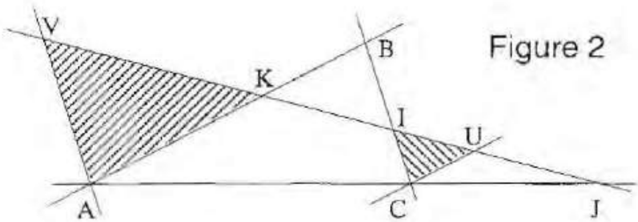

Figure 2

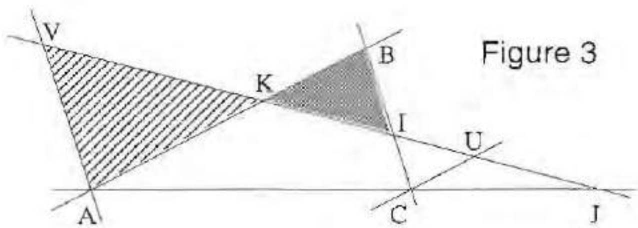

Figure 3

Commentaire.

Si les points I, J et K sont alignés, h_I transforme le triangle IKB en IUC (figure 1), h_J transforme IUC en VKA (figure 2) et h_K transforme VKA en IKB (figure 3) ; on en conclut que h transforme IKB en IKB, c'est la transformation identique.

On a donc démontré la partie directe du théorème.

Une preuve « algébrique » de l'énoncé réciproque

Le point I a pour image I par h_I. Soit V l'image de I par h_J. Puisque J est le centre de l'homothétie h_J, les points J, I et V sont alignés.

V est aussi l'image de I par $h_J \circ h_I$. Si $h = h_K \circ h_J \circ h_I$ est l'application identique, h envoie I sur I ; alors l'image de V par h_K est I. Puisque K est le centre de l'homothétie h_K, les points K, I et V sont alignés.

Les points J et K sont sur la droite (IV) : I, J et K sont alignés.