# Dans nos classes
# Liaison Troisième-Seconde

## Figures et Contraintes

Marie Lattuati

Ayant la chance d'enseigner à la fois en Collège et en Lycée, nous observons chaque année les difficultés que rencontrent nos élèves lors de la transition Troisième-Seconde.

Convaincue de la nécessité de respecter les programmes, sans anticiper sur celui de l'année suivante, mais aussi de l'importance d'une préparation des élèves aux exigences de travail et aux mathématiques de la classe de Seconde, nous avons particulièrement travaillé, cette année, sur l'enseignement par « activités », dans le but de faire acquérir à nos élèves de Troisième, un peu plus d'autonomie, de méthodes de recherche et des idées dans l'art de se poser « les bonnes questions » mathématiques… ce que nous essayons tous de réaliser dans nos classes !

Dans l'article qui suit, nous voulons montrer comment nous avons enrichi, avec un minimum de temps et d'imagination, des exercices « classiques » de géométrie extraits de nos manuels scolaires pour les transformer en *activités*.

En rapprochant les exercices de constructions géométriques de ceux de calculs de grandeurs (longueurs, aires, angles, …), nous avons voulu entraîner nos élèves à travailler dans différents cadres (géométriques, numériques et graphiques) et nous espérons ainsi :

- leur avoir fait prendre conscience de la *complémentarité de trois aspects de l'activité mathématique en géométrie : démonstrations, constructions et calculs de grandeurs,*
- leur avoir montré l'intérêt et l'efficacité des nouveaux outils de calculs mis à leur disposition (trigonométrie, propriété de Thalès, …) mais aussi leurs

insuffisances à résoudre tous les problèmes de calculs de grandeurs géométriques,
- les avoir préparés, insensiblement, aux notions d'invariants et de lieux géométriques,
- leur avoir mieux fait comprendre que le tracé matériel d'une figure mathématique ne représente jamais que la réalisation approximative de la figure théorique et conceptuelle.

Construire une figure mathématique, c'est imaginer une succession d'opérations théoriques qui permettent, avec les seuls instruments autorisés, de réaliser ensuite un tracé matériel. Chaque étape théorique doit être *justifiée* et l'élève travaille alors dans *le monde mathématique*. Le tracé de la figure, lui, est exécuté dans le *monde matériel* et approxime la figure théorique. De ce fait, toute mesure effectuée sur le tracé d'une figure est *approchée* et seuls les démonstrations et les calculs *mathématiques* permettent de donner les valeurs *exactes* des grandeurs de la figure théorique. Bien entendu, les mesures du tracé de la figure sont des approximations des valeurs exactes et servent de contrôle aux calculs des grandeurs mathématiques.

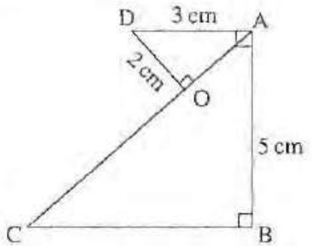
Les trois exercices que nous présentons ont été testés dans nos classes. Les réponses proposées sont celles de nos élèves qui, par leurs interventions, ont souvent infléchi et enrichi le déroulement prévu de l'activité.

**Exercice 1** (Pythagore 3ème)

<u>Énoncé de l'exercice</u> :

*Les données sont indiquées sur la figure. Calculer* AC *et* BC.

(Pour rendre cet exercice plus facile, on peut commencer par demander de montrer que $\widehat{ACB} = \widehat{OAD}$ ).




L'exercice demande, par exemple, d'utiliser l'égalité des angles alternes-internes formés par deux parallèles, puis d'écrire que deux angles aigus égaux ont des sinus égaux. Le théorème de Pythagore permet alors de calculer BC.

Transformons maintenant cet exercice en un exercice de construction. Deux questions se posent à l'enseignant :

1° Est-il possible de réaliser cette figure ?

2° Les données à respecter mènent-elles à une unique figure, à une isométrie près ?

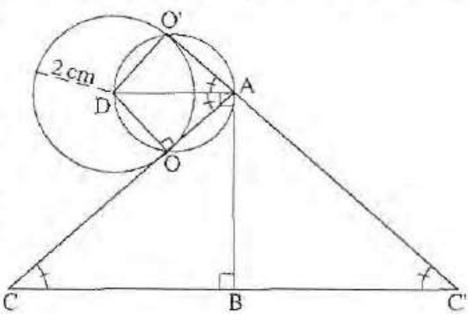
Autrement dit, le nombre de contraintes imposées à la figure (les hypothèses) fige-t-il la figure ? Les réponses demandées aux élèves sont-elles uniques ?

*On peut remarquer que cette unicité des réponses est sous-entendue dans chacun des exercices de géométrie où l'élève doit calculer des grandeurs (longueurs, aires ou angles). L'auteur de l'exercice choisit, en général, le nombre de contraintes exactes pour figer la figure.*

Il est possible d'utiliser la configuration de cet exercice pour « l'enrichir » en proposant d'abord aux élèves de construire[1] cette figure avec la règle graduée, l'équerre (pour gagner du temps) et le compas.

Un élève de Troisième sait commencer la construction : D, A, [AB] et la droite (BC).

La deuxième phase de la construction est aussi assez simple pour les élèves : elle nécessite de savoir que l'ensemble des sommets des triangles AOD rectangles en O est le cercle de diamètre [AD], ce qui revient à savoir construire les tangentes issues du point A au cercle de diamètre [AD]. Le cercle de diamètre [AD] et le cercle de centre D et de rayon 2 cm ont deux points d'intersection O et O′. La figure donnée montre que O ∈ [AC], les élèves excluent donc naturellement O′ et donc C′.




*La figure mathématique est réalisable, elle est unique et, dans cet exercice, toutes les grandeurs sont calculables : angles, longueurs et aires.* On peut donc, dans un deuxième temps, demander, en particulier, les calculs de AC et de BC.

Si on enlève la contrainte O ∈ [AC], alors il existe deux dispositions différentes de la figure qui vérifient les conditions, mais les triangles ABC et ABC′ d'une part, AOD et AO′D d'autre part sont isométriques.

[1] Classiquement, une construction s'effectue à la règle et au compas, mais, dans cette classe de Troisième, la construction de la perpendiculaire à une droite passant par un point étant acquise, nous avons souvent autorisé l'usage de l'équerre pour que la construction soit plus rapide à effectuer et à justifier. Par ailleurs, l'utilisation de la règle graduée pour réaliser les tracés est indispensable et ne constitue qu'une petite entorse aux conditions habituelles de constructions, puisque dans ces exercices toutes les longueurs données sont des nombres « constructibles » puisque rationnels.

Conclusion. En demandant d'effectuer la construction (justifications et tracé) d'une figure mathématique, l'enseignant :
- oblige les élèves à analyser la figure,
- s'aperçoit que, pour rédiger cet exercice, sans donner un tracé de la figure, il ne faudrait pas oublier de donner la contrainte $O \in [AC]$ pour que tous les élèves réalisent le même tracé,
- peut utiliser l'unicité de la figure théorique pour aider les élèves à entrer dans le monde de l'abstraction mathématique : il n'existe qu'*une* réponse exacte à chaque grandeur *calculée* sur la figure mathématique (même si les méthodes sont souvent multiples), alors que les *mesures* effectuées sur les tracés peuvent être *différentes* puisqu'elles ne sont que des réalisations approximatives des valeurs exactes de la figure mathématique...

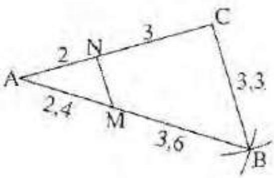
**Exercice 2** (Brevet, Bordeaux 1991)

Enoncé de l'exercice :

*On donne la figure ci-contre. On ne demande pas de la reproduire.*

*1° Montrer que (MN) // (BC).*

*2° Calculer MN.*




Cet exercice, décliné avec d'autres valeurs numériques, est un grand classique de la classe de Troisième : les démonstrations demandées utilisent à la fois la réciproque de la propriété de Thalès et la propriété directe :

$\frac{2,4}{6} = \frac{2}{5}$, puis $\frac{MN}{3,3} = \frac{2}{5}$, donc MN = 1,32.

Ni le parallélisme, ni la valeur de MN ne se prêtent à une bonne vérification sur la figure...

Analysons maintenant cette figure sous l'angle de sa construction :

Avec une règle graduée et un compas, la construction est réalisable dès la classe de Cinquième.

Les élèves peuvent construire le triangle ACB puis placer N et M.

La figure est constructible, elle est unique : tous les élèves doivent trouver les mêmes réponses aux deux questions posées. *Les données figent la figure.*

Cependant, à leur niveau, les élèves ne peuvent calculer aucun des angles de la figure.

Cet exercice peut donc être, pour les élèves, une approche du fait qu'ils savent réaliser la construction, mais qu'ils ne savent pas encore calculer les grandeurs non données de la figure.

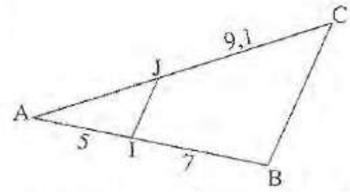
Comme souvent, la réalisation de la construction va précéder, dans les compétences des élèves, le calcul des grandeurs.

La présence d'angles droits est souvent, en Troisième, l'information qui permet d'effectuer les calculs des longueurs des côtés ou des angles d'un triangle (propriété de Pythagore et trigonométrie).

**Exercice 3** (Brevet. Poitiers Juin 1990)

<u>Enoncé de l'exercice :</u>

*Sur la figure ci-contre, on sait que :*
AI = 5, IB = 7, JC = 9,1, (IJ) // (BC).
*Calculer* AJ.
*(Indication possible : poser* AJ = $x$*).*




Cet exercice est une situation classique d'utilisation de la propriété de Thalès. La résolution numérique donne $x = 6,5$.

Analysons maintenant cette figure en nous posant trois questions.

1. Cette figure est-elle constructible ?
2. Est-elle unique ?
3. Tous les élèves doivent-ils trouver la même réponse ponr AJ ?

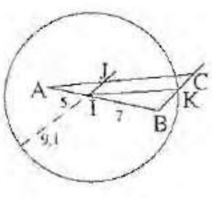
Dans un exercice de Brevet, il est souhaitable de pouvoir répondre affirmativement aux questions 1 et 3 !

Nous savons bien (mais les élèves ne le savent pas !) que, dans cet exercice, il existe une infinité de figures remplissant les contraintes imposées, mais que, pour toute solution, on aura la même valeur de AJ (en fait, en utilisant par exemple des homothéties, on démontre que les points C sont placés sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{12}{7} \times 9,1$ et les points J sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{5}{7} \times 9,1$).

Avant de demander aux élèves de calculer AJ, nous leur avons proposé d'imaginer une construction de la figure. Ils pouvaient uriliser la règle graduée et le compas.

Il a fallu beaucoup de réflexion et de discussion en classe pour éliminer les constructions fausses et obtenir une réponse exacte.

Voici la proposition d'une élève de Troisième :
Placer A, B et I.
Construire le cercle de centre I et de rayon 9,1.
Prendre un point K sur ce cercle.
Tracer la parallèle à (IK) passant par A.
Cette parallèle coupe (BK) en C.

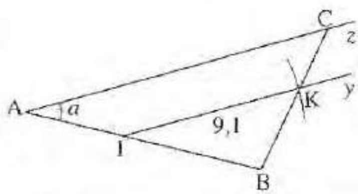



La validité de cette construcrion a été discutée et les élèves ont alors pris conscience que la figure n'était pas figée par les données, mais qu'il lui restait « un peu » de liberté. Il est sûr que, si le calcul de AJ précède la construction de la figure, la classe voit beaucoup plus rapidement qu'il reste une liberté à la figure.

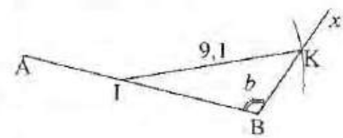
Nous avons alors cherché comment figer la figure.

Les élèves ont proposé de fixer $\widehat{BAJ}$ ou $\widehat{AIJ}$ ou IJ ou BC et nous avons essayé de construire la figure dans chacun de ces cas, sans utiliser la valeur de AJ.

1° On donne $\widehat{BAJ} = a$. La construction est réalisable : on place A, I, B puis la demi-droite [Az) telle que $\widehat{IAz} = a$. On trace la parallèle [Iy) à [Az) en I. K est le point de [Iy) tel que IK = 9,1. On peut alors terminer la construction.




2° On donne $\widehat{AIJ} = b$. On justifie que $\widehat{ABC} = b$. La construction est réalisable. On place A, I, B et [B$x$) telle que $\widehat{ABx} = b$. On construit le triangle IBK : K étant le point d'intersection de [B$x$) avec le cercle de centre I et de rayon 9,1. Le rayon 9,1 est plus grand que IJ, donc, quelle que soit la valeur de $b$, le point K existe et est unique... Il est alors facile de terminer la construction en traçant par A la parallèle à (IK) qui coupe (BK) en C. J est alors à l'intersection de (AC) et de la parallèle à (BC) passant par I.




Dans ces deux cas, la donnée d'un angle a permis de fixer une demi-droite, ce qui a rendu la construction possible.

3° On donne IJ ou BC. Nos élèves n'ont pas pu réaliser la construction. Les élèves apprennent ainsi qu'il est parfois nécessaire d'avoir recours aux calculs pour construire une figure, même si on sait que les hypothèses figent la figure. Ici, c'est le calcul de AJ, par exemple, qui va permettre de réaliser la construction.

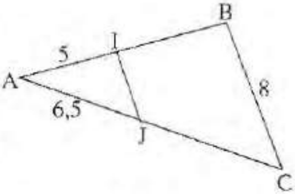
Nous avons terminé cette activité en résumant ce qu'il était possible de démontrer sur toutes les figures solutions :

1° AJ = 6,5.

2° Si on pose BC = $y$ et IJ = $x$, alors $y = 2,4\,x$... et cette activité débouche sur une application linéaire.

Dans une classe de Seconde, il est possible de prolonger cette activité en utilisant la notion d'homothétie. On suppose placés les points A, I et B. Le point K se déplace sur le cercle de centre I et de rayon 9,1 (mais son lieu n'est pas ce cercle entier puisqu'il faut éliminer les deux cas où A, B et K seraient alignés). Or, l'homothétie de centre B et de rapport 12/7 transforme K en C… d'où le lieu de C. Mais l'homothétie de centre A et de rapport 5/12 transforme C en J… d'où le lieu de J. On pourrait même trouver la transformation qui transforme K en J directement…

Pour terminer l'analyse de cet exercice, nous vous proposons une variante de cette activité, intéressante en Troisième et en Seconde.

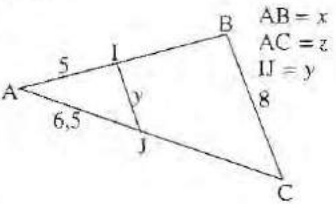



*On donne* (IJ) // (BC), AI = 5, AJ = 6,5 *et* BC = 8.

*Peut-on construire cette figure ? y-a-t-il plusieurs solutions ?*

La première construction exacte qui a été proposée en classe de Troisième est la suivante : on choisit IJ = 4 et alors (IJ) est une droite des milieux du triangle ABC, ce qui permet de terminer une construction remplissant les conditions. (Les élèves ont beaucoup de bonnes idées !).

Nous travaillons alors à la recherche d'autres solutions… Il apparaît donc qu'il y a trois longueurs non données dans cet exercice : IJ = $y$, AB = $x$ et AC = $z$, mais que la connaissance de l'une d'entre elles conduit à la connaissance des deux autres… nous arrivons à l'idée de fonction :




$$z = 1{,}3\,x \;;\; y = \frac{40}{x} \;;\; y = \frac{52}{z}$$

et nous disposons ainsi d'une droite et de deux hyperboles…

Si nous imposons à une figure trop de contraintes ou des contraintes contradictoires, elle devient irréalisable. La plupart des exercices de géométrie proposés aux élèves comporte un nombre de contraintes qui permet d'avoir une réponse unique aux calculs de grandeurs demandés. On peut cependant proposer aussi des exercices où il reste un degré de liberté à la figure. Cette idée nous semble tout-à-fait accessible aux élèves de Troisième. Lorsqu'une propriété reste vraie dans l'ensemble des figures libres obtenues, elle prend alors le statut d'invariant de cet ensemble de figures. La position du centre de gravité sur chaque médiane est un exemple de propriété invariante dans tout triangle, totalement libre. La position du centre du cercle circonscrit est une propriété des triangles rectangles, qui ne sont plus des triangles complètement libres...

## Conclusion

Les exercices que nous avons présentés ne sont ni exceptionnels ni exemplaires. Au contraire, nous les avons choisis sans rechercher l'originalité, pour montrer qu'il était possible d'entreprendre ce travail à partir de n'importe quel exercice de géométrie comportant des questions de calculs de grandeurs.

Dans cet article, nous avons essayé de défendre plusieurs idées, qui, raisonnablement distillées aux élèves de Troisième, pourraient participer à une bonne préparation de nos élèves de Troisième à la géométrie du lycée, à savoir :

1° Le choix du nombre correct de contraintes est essentiel pour fixer une figure.

2° Les notions d'existence, d'unicité ou d'universalité sont fondamentales en mathématiques. Nous pouvons facilement les dégager d'activités géométriques de constructions et de calculs.

3° Lorsqu'une figure est fixée, on devrait, théoriquement, pouvoir en calculer toutes les grandeurs. Cependant, dans l'organisation des programmes du collège, il arrive souvent que les élèves sachent réaliser une construction sans posséder les techniques pour calculer les grandeurs. La trigonométrie en Troisième ou la propriété de Thalès apparaissent alors comme de bons outils pour avancer dans les possibilités de calculs de graudeurs.

4° Lorsqu'une figure est fixée, on devrait, théoriquement, pouvoir la construire, mais ce n'est pas toujours le cas et le recours à des calculs préliminaires peut s'avérer indispensable.

5° Lorsqu'on enlève une contrainte à une figure fixée, on lui rend un degré de liberté. On crée alors une famille de figures, ce qui amène naturellement à des études d'invariants, de lieux géométriques et de fonctions.

## Bibliographie

Le point de départ de ce document est l'article, publié dans la revue Inter-Irem REPERES n° 8 de Juillet 1992 « ENSEIGNER PAR LES ACTIVITES » par un groupe d'enseignants de l'Irem de Poitiers.