Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune, et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS.
par internet : rferreol@club-internet.fr

NOUVEAUX AVIS DE RECHERCHE

Pas de nouvel avis de recherche dans ce bulletin, mais reportez-vous au numéro précédent, où il y en avait cinq !

R PONSES

Avis de recherche n^o 92

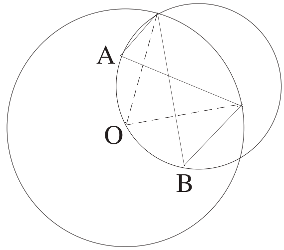
Problème du billard circulaire : peut-on construire, à la règle et au compas, les points M du trajet AMB reliant deux points A et B d'un disque, tel que M soit sur le cercle (C) limitant le disque, trajet obéissant aux lois de la réflexion ?

Dans le bulletin 419 a été relatée la solution de Jacques Bouteloup, utilisant le lieu des points M tels que O soit sur une bissectrice de (MA,MB), qui est une strophoïde. Mais ce problème est une mine et il y aurait certainement matière à écrire un livre !

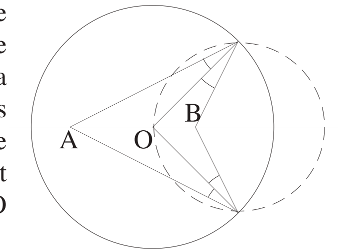
Commençons tout d'abord par du positif.

Il y a deux cas où les points M sont constructibles, et pas seulement de façon triviale (constructions envoyées par Jean Moreau de Saint Martin).

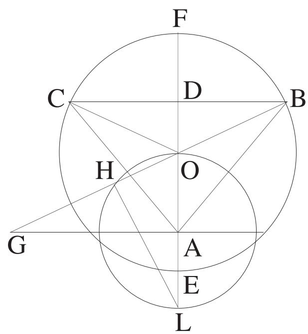
• Si OA = OB, les extrémités du diamètre bissectrice intérieure de l'angle AOB conviennent comme solutions. Mais il peut y avoir d'autres solutions : les intersections du cercle circonscrit au triangle AOB et du cercle (C) si elles existent ; c'est une jolie application du théorème de l'angle inscrit.



• Si O, A et B sont alignés, à nouveau une extrémité du diamètre OAB convient (l'autre étant exclue pour ne pas atteindre B avant la bande !). Mais il peut y avoir d'autres solutions : les intersections du cercle d'Apollonius d'équation MA/MB = OA/OB et de (C) si elles existent (ce qui implique que O est entre A et B).



Une autre chose positive, lue dans Callandreau, Célèbres problèmes mathématiques, Albin Michel, mais qui concerne un autre problème : les deux points d'impact nécessaires pour qu'une boule, partant de A, revienne en A, sont eux aussi constructibles. Voici la figure avec la construction, sans explication.



Enfin, Gérald Bourgeois (Marseille, bourgeoi@lumimath.univ-mrs.fr) affirme que l'on peut construire, comme toute racine d'un polynôme de degré 3 ou 4 sur **Q**, les points d'impacts (pour le problème initial) par *pliage de papier* et demande, en avis de recherche, de fournir une construction effective.

Les propriétés supplémentaires des constructions par pliage de papier par rapport aux constructions à la règle et au compas sont expliquées dans R. Geretzschläger, Euclidean constructions and the geometry of origami, Mathematics magazine, vol. 68, n° 5 (décembre 1995) et dans T. Hull, A note on “impossible” paper folding, American mathematical monthly (mars 1996).

Mais revenons à la non-constructibilité à la règle et au compas dans le cas général.

J’ai beaucoup admiré, par la remarquable simplicité de l’équation qu’il obtient, la méthode de Pierre Renfer (Ostwald). J’en ai fait un problème faisable par de bons élèves de terminales S, dont voici un extrait :

Pour simplifier, on suppose que le cercle (C) est le cercle trigonométrique, et l’on désigne par a et b les affixes respectives de A et B (qui ne sont pas forcément intérieurs au cercle).

Normalement, un point M est un point d’impact d’une boule de billard allant de A en B ssi la bissectrice *intérieure* de l’angle AMB est perpendiculaire à la tangente à la courbe. Pour que les équations soient plus simples, nous allons définir un point d’impact généralisé comme un point M tel que *l’une des deux* bissectrices de l’angle AMB soit perpendiculaire à la tangente à la courbe.

1) Montrer qu’un point M d’affixe z du cercle (C) est un point d’impact généralisé d’une boule de billard allant de A vers B si et seulement si le complexe $\dfrac{(a-z)(b-z)}{z^2}$ est réel.

2) En déduire qu’un point M d’affixe z du plan est un point d’impact généralisé d’une boule de billard allant de A vers B si et seulement si $z\bar{z}=1$ et

$$\bar{a}\bar{b}z^4-(\bar{a}+\bar{b})z^3+(a+b)z-ab=0 \qquad (1)$$

3) Dire pourquoi on ne restreint pas la généralité si l’on suppose que l’axe des abscisses est la bissectrice intérieure de l’angle AOB, ce que nous supposons dorénavant. Montrer qu’alors ab est réel et que l’équation (1) peut alors se mettre sous la forme $P(z)=z^4-\bar{c}z^3+cz-1=0$ où l’on exprimera c en fonction de a et b.

Pierre Renfer remarque alors que le polynôme P est en général irréductible dans Q(c)[X]. Et alors, si K est le corps de rupture de P, l’indice $[K:Q(c)[X]]$ est en général 24, qui n’est pas une puissance de 2, ce qui interdit la constructibilité de z.

Jean Brette du Palais de la découverte m’a envoyé une photocopie d’un article d’un certain Peter Neumann (Oxford, Peter.Neumann@queens.ox.ac.uk) tiré de l’American Mathematical Monthly (juillet 1998), qui s’est beaucoup intéressé à ce problème, mais affirme un peu vite : « it seems, however, that the question wether a reflection point can be found by classical Ruler & Compass methods has not been answered before - perhaps it has not even been asked » (la question m’a été envoyée par Jean-Yves le Cadre le 2 novembre 1997 !).

Peter Neumann résout le problème de la non-constructibilité par une méthode étonnamment proche de celle de Pierre Renfer. Il traite un cas particulier, et en déduit par la théorie de Galois que l'ensemble des quatre coordonnées de A et B telles que le point M soit constructible est un sous-ensemble négligeable de $\mathbf{R}^4$.

Mais voici maintenant la contribution de Jean Moreau de Saint Martin qui se ramène à la trisection d'un angle.

« Dans le cas général, je prends des coordonnées polaires de pôle O, d'axe polaire Ox la bissectrice intérieure de l'angle AOB. Je note OA = a, OB = b, (OB,Ox) = (Ox,OA) = β, (Ox,OM) = μ.

L'équation de la réflexion (MA,MO) = (MO,MB) donne alors, en réarrangeant :

$$(a+b)\cos\beta \cdot \sin\mu - (a-b)\sin\beta \cdot \cos\mu = 2ab\sin\mu \cdot \cos\mu .$$

Cette équation qui détermine μ revient, en posant $x = \cos\ \mu$, $y = \sin\mu$, à chercher l'intersection du cercle unité et d'une *hyperbole équilatère* qui passe par l'origine, car son équation est de la forme $xy + ux + vy = 0$.

Intéressons-nous aux cordes communes à ces deux coniques. Leurs droites-supports ont des équations de la forme $x = py + m$, $x = p'y + m'$, et constituent une conique dégénérée du faisceau des coniques correspondant.

Donc $(x - py + m)(x - p'y + m') = A\left(x^2 + y^2 - 1\right) + B(xy + ux + vy)$.

En identifiant et en éliminant A, B, p', m et m', on obtient

$$\left(\frac{2p}{p^2+1}\right)^3 - \left(\frac{2p}{p^2+1}\right)\left(1 - u^2 - v^2\right) - 2uv = 0 ,$$

équation du troisième degré. Il reste ensuite à discuter si une ou trois racines en $\frac{2p}{p^2+1}$ sont réelles et se situent effectivement dans l'intervalle [-1,1] pour donner des valeurs réelles à p, p', m et m'. S'il y a trois racines réelles, $u^{2\beta} + v^{2\beta} \leq 1$ et l'équation se ramène à la détermination de l'angle

$$\frac{1}{3}\arccos\frac{3uv\sqrt{3}}{\left(1-u^2-v^2\right)^{3/2}} .$$

Or il est bien connu que le problème de la trisection de l'angle (connu des anciens Grecs avec la quadrature du cercle et la duplication du cube) ne se laisse pas traiter par la règle et le compas, sauf pour certaines valeurs de l'angle (qui sont quand même une infinité). »

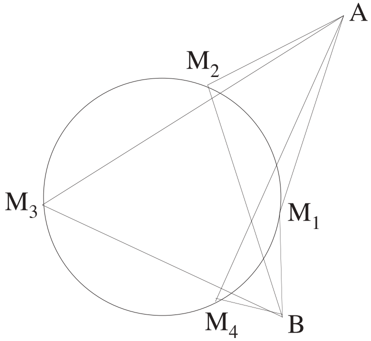
Ce qui est génial avec ce problème, c'est que chacun peut arriver à la mise en équation en utilisant une partie des mathématiques qu'il aime.

Gérald Bourgeois, lui, remarque plutôt que les points d'impacts M réalisent un extremum local de la fonction de (C) dans **R** : $M \mapsto MA + MB$ et tombe sur une équation assez complexe pour nous mortels, mais dont Maple ne fait qu'une bouchée. En montrant que le groupe de Galois est d'ordre 24, il conclut à la non-constructibilité.

Enfin, voici un petit programme Maple permettant de visualiser les trajets de la boule. Je me suis aperçu qu'il y en avait déjà un fourni avec le logiciel (regarder billiard.mws), mais il me semble très compliqué ; avec la méthode de Pierre Renfer, j'ai obtenu :

```
P:= z->conjugate(a*b)*z^4-conjugate(a+b)*z^3+(a+b)*z-a*b;
a:=3/2+3*I/2:b:=1-I:S:={fsolve(P)};`
for z in S do if abs(abs(z)-1)>0.001 then S:=S minus{z} fi od:S;
S:=map(z->argument(z),S);
trajet:=map(t->[[Re(a),Im(a)],[cos(t),sin(t)],[Re(b),Im(b)]],S);
plot([[cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],seq(trajet[i],i=1..nops(trajet))],scaling=constrain
ed,axes=none);
```

Bien entendu, rien n'interdit de prendre des points en dehors du disque. On peut alors parler par exemple de flipper géant… Voici ce qu'on obtient avec A(3/2,3/2) et B(1,-1). Vous remarquerez qu'un seul point correspond à quelque chose de physiquement réalisable.



Enfin, Roger Cuppens signale que le logiciel Cabri II fournit les intersections de deux coniques : les points d'impact sont constructibles avec ce logiciel.

Avis de recherche n° 96.

Étant donnés trois arcs de courbe ainsi disposés, je recherche un

algorithme pour construire, par approximations successives, le cercle inscrit dans cette figure.

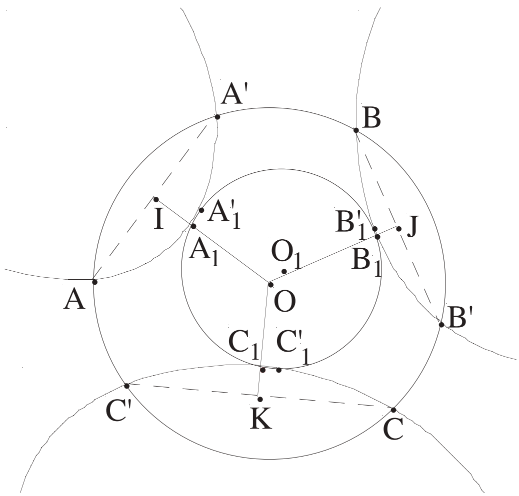
Albert LENZ (Goxwiller) a envoyé une proposition d'algorithme, qu'il n'a pas justifié, mais qui dans la pratique est d'une redoutable efficacité, tellement, qu'il est difficile de faire des figures lisibles allant au delà de trois étapes dans la plupart des cas :

1. Tracer un cercle de centre O répondant approximativement à l'attente, sécant aux trois courbes en A et A′, B et B′, C et C′ respectivement (ou, si A, B, C sont des points pris respectivement sur les trois arcs de courbe, tracer le cercle circonscrit au triangle ABC qui recoupe les courbes en A′, B′, C′ respectivement)

2. Soit I, J, K les milieux respectifs de AA′, BB′, CC′. Les segments [OI], [OJ] et [OK] coupent les courbes en A_1, B_1 et C_1.

3. Tracer le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$, qui recoupe les courbes en A'_1, B'_1, C'_1.

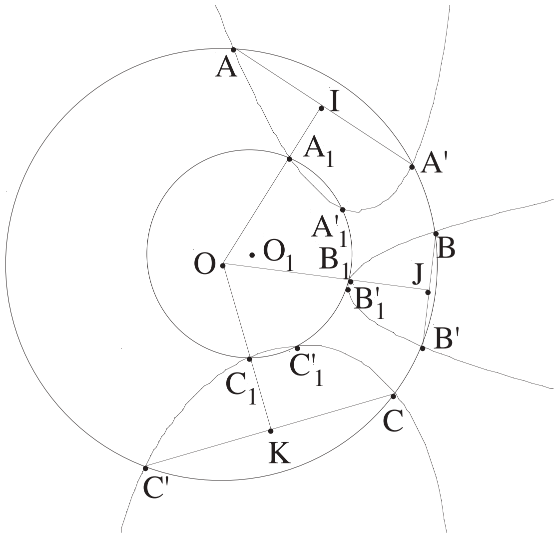
4. etc.



Quelques remarques :

- pour apporter une preuve de la validité de cette méthode, il faudrait mieux préciser les conditions initiales : les segments O_iI_i, O_iJ_i et O_iK_i sont intérieurs au cercle de centre O_i, si la convexité des trois courbes est bien orientée, mais le rayon du cercle de rang i+1 peut être plus grand que celui de rang i.

- l’algorithme convient même dans des situations apparemment peu favorables :
- quand le cercle tangent est beaucoup plus « périphérique » aux trois courbes données.
- même quand l’une ou l’autre courbe présente des points d’inflexion, ou



quand elle présente une concavité en direction du cercle tangent.

Solution de l’exercice de la page 232

Le nombre qui, en notation décimale, s’écrit à l’aide de n chiffres 1 consécutifs est : $\dfrac{10^n - 1}{9}$. Il est divisible par 49 si et seulement si $10^n - 1$ est divisible par 49.

1° Tout d’abord, il est nécessaire que $10^n \equiv 1 \bmod 7$.

$$10 \equiv 3,\ 10^2 \equiv 9 \equiv 2,\ 10^3 \equiv 3 \times 2 = 6,\ 10^4 \equiv 3 \times 6 = 18 \equiv 4,$$
$$10^5 \equiv 3 \times 4 = 12 \equiv 5,\ 10^6 \equiv 3 \times 5 = 15 \equiv 1.$$

Donc « $10^n - 1$ est multiple de 7 » équivaut à : « n est multiple de 6 ».

2° Modulo 49, $100 \equiv 2$ et $10^6 = 100^3 \equiv 2^3 = 8 = 7 + 1$.

$$10^{6n} \equiv (7+1)^n = 1 + 7n + 49C_n^2 + K$$

par la formule du binôme. $10^{6n} \equiv 1 + 7n \bmod 49$. Il faut donc $n = 7$ et la réponse est 42.