

Mise en évidence du rôle de l'excentricité dans la détermination des coniques

Gérard CHEVIN
Lycée COLBERT, 51100 REIMS
IREM de REIMS

La définition des coniques par foyer et directrice ne fait plus partie du programme de spécialité de Terminale S et les coniques sont désormais présentées en section S dans le programme du tronc commun comme exemples de courbes paramétrées.

Nous publions cependant cette activité parce qu'elle permet de présenter, par l'expérimentation et de façon rapide et claire, les trois types de coniques. Elle peut accompagner une activité en classe ou un problème sur la définition par foyer et directrice, par exemple pour chercher un paramétrage qui mette en lumière la parenté entre ces trois sortes de courbes.



Cet article constitue un complément à l'article « Les Coniques et Cabri-Géomètre, une expérimentation à Sao Paulo » paru dans le dernier bulletin.

Cabri-Géomètre est effectivement un outil merveilleux permettant la construction des coniques à partir de caractéristiques très variées. Mais, très

souvent, les constructions proposées, les activités, les TP sont centrés sur une conique en particulier, et les liens entre les différentes coniques, leurs propriétés communes, apparaissent assez mal. L'intérêt de la construction proposée ici est justement de passer de l'une à l'autre en faisant simplement varier le rapport d'excentricité. Les définitions et notations utilisées sont les suivantes :

Choisissons une droite (d), un point F qui n'appartient pas à (d) et un nombre réel strictement positif e . Soient M un point quelconque du plan et H son projeté orthogonal sur (d). Le lieu des points M tels que $e = \frac{MF}{MH}$ est appelé une conique. La droite (d) est la directrice de la conique, F en est le foyer et e l'excentricité.

Il s'agit donc là d'une mise en évidence très forte du rôle joué par l'excentricité dans la détermination de la conique ; et ce, par une approche purement expérimentale : l'utilisateur peut faire varier des paramètres et observer ce qui se passe. Faire de la Géométrie une « science expérimentale » est en effet incontestablement la plus précieuse richesse et la caractéristique la plus innovante de Cabri-Géomètre. L'occasion est trop belle de rappeler une fois encore quel fabuleux outil de conjecture constitue ce logiciel et de souligner combien une distinction claire entre preuve et conjecture est profitable à nos élèves.

L'étude des coniques par cette voie a déjà été proposée auparavant (cf. [1] et [2]). L'utilisation de la nouvelle version Cabri-Géomètre II permet de simplifier et de compléter cette étude.

Nous proposons très souvent cette activité aux stagiaires IUFM dans le cadre de journées de sensibilisation à l'utilisation d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques.

1^{re} étape : mise en place du rapport d'excentricité et des longueurs MF et MH (Voir figure 1)

Tracer dans le haut de l'écran une droite (Ox), puis la perpendiculaire à (Ox) passant par O.

A l'aide de la commande « Point sur un objet », placer sur (Ox) deux points nommés I (ce sera le point unité) et E, et sur sa perpendiculaire un point nommé f (le point m est confondu avec O : inutile de créer un nouveau point, il suffit de donner à ce point les deux noms O et m séparés par « Entrée », ce qui ne pose aucun problème).

Tracer la droite (Ef), ainsi que la parallèle à (Ef) passant par I qui coupe (mf) en h . Tracer les segments [OI], [OE], [mf] et [mh]. Mesurer OI et OE.

A l'aide de la commande « Calculatrice », calculer et déposer à l'écran le rapport e des deux longueurs. La construction est en effet telle que

$$e = \frac{OE}{OI} = \frac{MF}{MH}.$$

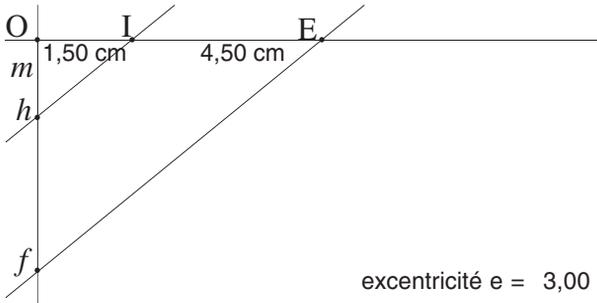


Figure 1

Cacher alors la longueur de [OI], la longueur de [OE], les droites (Ih) et (Ef) ; le décor est planté :

- en faisant glisser E sur la demi-droite]Ox), on peut donner au rapport d'excentricité e
 - une valeur comprise entre 0 et 1 si E appartient au segment [OI],
 - la valeur 1 si E est en I,
 - et une valeur supérieure à 1 si E appartient à la demi-droite]Ix).
- en faisant glisser f , on peut faire varier les longueurs des segments [mf] et [mh], tout en maintenant le rapport de ces longueurs égal à la valeur e fixée.

2^e étape : mise en place de la directrice, du foyer et des points générateurs (Voir figure 2)

La directrice est une droite quelconque que l'on peut tracer à l'aide de la commande « Droite » (Voir figure 6). Mais pour des raisons de commodité et de disposition à l'écran, on peut la tracer perpendiculairement à (Ox) : construire un point sur la droite (Ox), tracer la perpendiculaire à (Ox) en ce point. Ce sera la directrice (d).

A l'aide de la commande « Compas », tracer le cercle de centre ce point et de rayon le segment [mh].

Créer les deux points d'intersection de ce cercle avec la droite (Ox) et tracer les deux perpendiculaires à (Ox) passant par ces points. Ces deux droites sont donc l'ensemble des points situés à la distance mh de la directrice (d).

Construire un point qui sera le foyer F , et à l'aide de la commande « Compas », tracer le cercle de centre F et de rayon le segment $[mf]$.

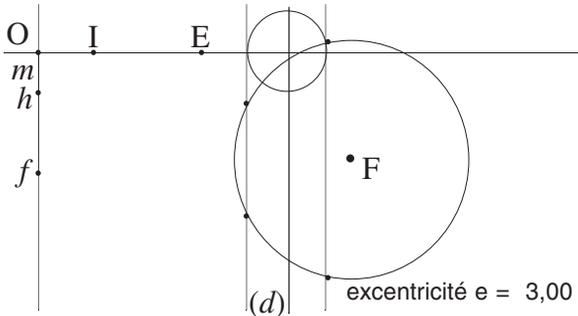


Figure 2

Après avoir choisi une longueur mf et un rapport d'excentricité e tels que le cercle coupe les deux droites précédentes, créer les quatre points générateurs, intersections de ce cercle et des deux droites en question.

Cacher les deux cercles et les deux droites pour ne garder que le foyer, la directrice et les quatre points ; les acteurs sont en place : ces quatre points sont bien tels que le rapport de leur distance au foyer d'une part, et à la directrice d'autre part, est égal à e .

3^e étape : les coniques (Voir figures 3, 4 et 5)

Il suffit dès lors de changer le rapport d'excentricité e et de faire varier les longueurs mf et mh comme indiqué à la fin de l'étape 1 pour tracer les coniques à l'aide de la commande « Lieu » (figure 3).

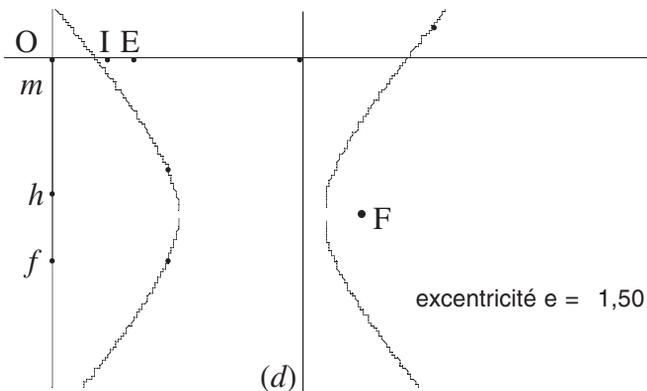


Figure3

Pour mettre en œuvre cette commande, on désigne un point générateur, puis le point f (car c'est le point f qui, en se déplaçant sur (mh) , engendre le lieu). Selon les cas, on va donc en fait obtenir deux ou quatre « morceaux » de conique.

On peut alors voir la conique évoluer lorsqu'on fait varier l'excentricité en déplaçant le point E.

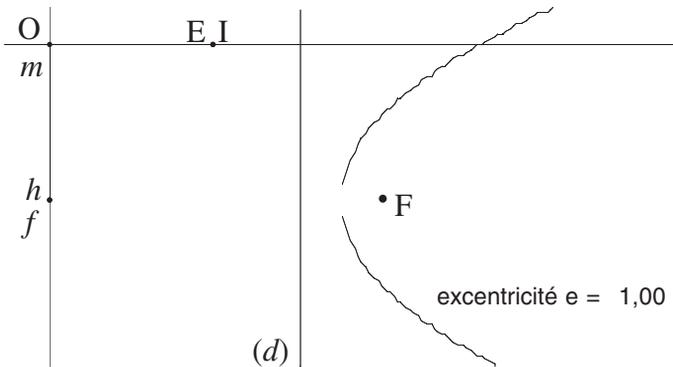


Figure 4

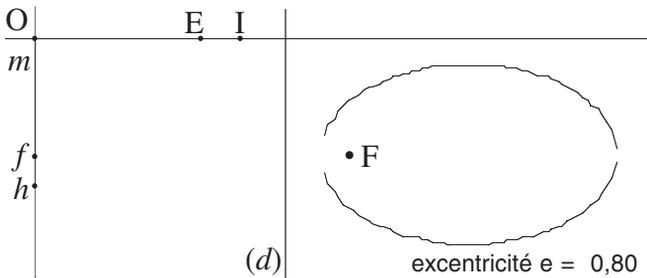


Figure 5

On peut également observer les conséquences sur le tracé de l'éloignement du foyer par rapport à la directrice.

La commande « Conique » permet de tracer une conique à partir de 5 points. Il suffit donc de disposer de 5 points appartenant au lieu et d'utiliser cette commande. On peut ainsi vérifier qu'il y a bien identité entre le lieu obtenu et la conique tracée par Cabri-Géomètre.

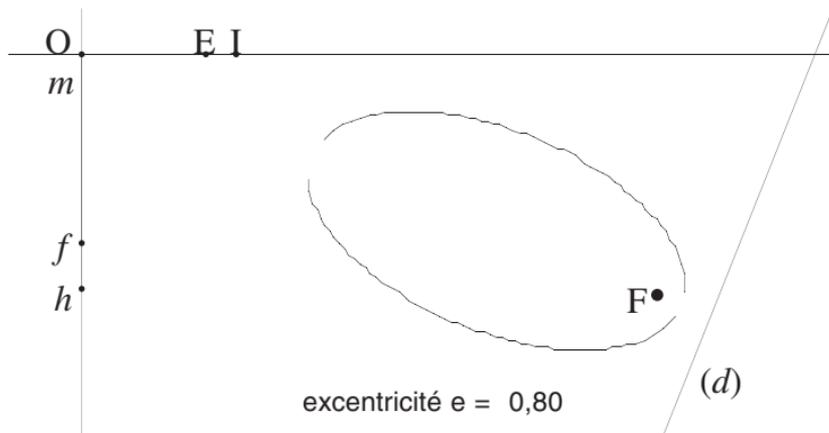


Figure 6

Bibliographie

- [1] Yves BOUTELLER et Michèle DUPÉRIER. Apprendre et pratiquer la géométrie avec l'ordinateur. IREM d'Orléans, 1993.
- [2] Roger CUPPENS. Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre. Tome 2. Brochure de l'APMEP n° 105 (juin 1996).