Étude

Des approches variées pour un même phénomène : la datation au radiocarbone

Bernard Parszysz

En ce temps situé à la charnière de deux millénaires, où les médias se posent (et nous posent) des questions plus ou moins saugrenues, du genre : Pourra-t-on faire deux « réveillons du millénaire » en naviguant autour de la ligne de changement de date ? Le troisième millénaire débutera-t-il le 1er janvier 2000 ou le 1er janvier 2001 ? Quand a débuté l'ère chrétienne ? etc, les questions de datation sont particulièrement à l'honneur, ce qui fournit sans aucun doute aux enseignants de mathématiques de collège des idées pour ancrer leur enseignement dans la « réalité médiatique ». Je voudrais ici envisager le problème de la datation en me tournant, non pas vers l'avenir, mais vers le passé, et, prenant l'exemple de la datation au radiocarbone, en envisager plusieurs approches différentes et complémentaires, exploitables au lycée (de la Seconde à la Terminale)… et au-delà. Ceci nous fournira l'occasion de mettre en évidence quelques aspects de la modélisation d'un phénomène physique, et en particulier :
1) qu'un modèle s'appuie sur des « hypothèses de modèle »,
2) que ses insuffisances, ou la confrontation avec la réalité, peuvent amener à le modifier pour l'améliorer.

1. Le principe

Le carbone 14 (C^{14}) est un isotope radioactif du carbone « ordinaire » (C^{12}) qui se forme dans la haute atmosphère sous l'action des rayons cosmiques. Grâce à la photosynthèse, il passe ensuite (comme le C^{12}) dans les plantes, puis dans les animaux (qui mangent les plantes ou se mangent les uns les autres). Les êtres vivants renferment donc, à côté du carbone 12, du carbone 14 radioactif. Comme toute substance radioactive, le C^{14} se désintègre pour se transformer en C^{12}, de façon que, au bout d'un temps T (appelé « demi-vie » ou « période »), la moitié de la quantité initiale a disparu ($T \approx 5730$ ans[1]). Mais les échanges gazeux des êtres vivants avec l'air « reconstituent » le C^{14} qui disparaît, de telle sorte que le rapport du C^{14} au C^{12} reste constant (et indépendant de l'espèce). Lorsque l'être meurt, les échanges gazeux cessent et le C^{14} se désintègre sans compensation extérieure.

La méthode de datation archéologique dite du “carbone 14” est basée sur ce phénomène. Partant du principe que la proportion de C^{14} chez les êtres vivants est restée constante au cours des âges, il suffit de déterminer sur un fragment de matière organique (végétal ou animal) - par comptage des atomes[2], par exemple - le taux restant, puis d'établir son rapport ρ au taux initial, pour en déduire le temps écoulé depuis la mort de l'être dont provient la matière[3]. Dans ce qui suit, je prendrai l'exemple de la détermination de l'âge d'un fragment de charbon de bois recueilli dans un foyer sur un site préhistorique, pour lequel l'analyse a donné $\rho = 0{,}316$.

2. Une approche discrète

On peut simplement dire que ρ est, par nature, une fonction décroissante du temps, et que :

au bout du temps T, on a $\rho_1 = 0{,}5$
au bout du temps 2T, on a $\rho_2 = 0{,}25$
au bout du temps 3T, on a $\rho_3 = 0{,}125$
au bout du temps 4T, on a $\rho_4 = 0{,}0625$ etc.

Plus généralement, on a $\rho_n = 2^{-n}$ (c'est-à-dire une suite géométrique de raison 1/2).

En ce qui concerne notre échantillon, on peut donc affirmer que $T < A < 2T$, c'est-à-dire que le site a été occupé à un moment compris entre 5730 et 11460 ans BP (= Before Present).

1 Source : Atlas de l'archéologie (sous la direction de Chris SCARRE). Éd. Larousse 1990.

2 Récemment, une nouvelle technique a fait son apparition : la mesure du rayonnement.

3 En pratique, la méthode est efficace pour des âges compris entre 500 ans et 300 000 ans.

On peut essayer d'affiner cette méthode : le principe du 1) indique que le rapport de la quantité présente à l'instant t + T à celle présente à l'instant t est indépendant de t. En extrapolant, supposons que le rapport de la quantité présente à l'instant t + Δt à celle présente à l'instant t ne dépend que de Δt. On peut alors chercher la valeur $\rho_{1/2}$ du rapport correspondant à Δt = T/2: on doit avoir $(\rho_{1/2})^2 = 0{,}5$, d'où $\rho_{1/2} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$.

On en déduit que, au bout du temps 1,5T, on a $\rho_{3/2} = 0{,}5 \cdot \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}3536$. Par conséquent, on a maintenant 1,5T < A < 2T, ce qui nous fournit la nouvelle « fourchette » 8600-11460 ans BP.

On pourrait bien sûr encore réduire la fourchette, mais on peut aussi construire une table qui sera valable une fois pour toutes (à la manière dont ont été construites les tables de logarithmes au 17[e] siècle). On obtiendra, par exemple, avec Δt = T/8 :

Age	Rapport
0	0
T/8	0,9170
T/4	0,8409
3T/8	0,7711
T/2	0,7071
5T/8	0,6484
3T/4	0,5946
7T/8	0,5453
T	0,5

Utilisation de la table : ayant ici T < A < 2T, on commence par se ramener à l'intervalle [0 ; T] en multiplant le rapport par 2, ce qui nous donne 2ρ = 0,632. Ce rapport nous situe dans l'intervalle]5T/8 ; 3T/4[, et on peut conclure que l'on a T + 5T/8 < A < T + 3T/4, c'est-à-dire que l'âge se situe dans la fourchette 9310-10030 ans BP.

De même, une dichotomie supplémentaire nous donnera le tableau suivant (Δt = T/16) :

Age	Rapport
T/16	0,9576
T/8	0,9170
3T/16	0,8781
T/4	0,8409
5T/16	0,8052
3T/8	0,7711
7T/16	0,7384
T/2	0,7071

Age	Rapport
9T/16	0,6771
5T/8	0,6484
11T/16	0,6209
3T/4	0,5946
13T/16	0,5694
7T/8	0,5453
15T/16	0,5222
T	0,5000

On voit que le rapport 0,632 nous place dans l'intervalle]5T/8 ; 11T/16[. On obtient donc cette fois la fourchette 9310-9670 ans BP.

Malgré tout, cette approche est quelque peu incommode (elle nécessite l'utilisation d'une table, ainsi que des calculs annexes). C'est pourquoi on aimerait disposer d'un outil plus efficace.

3. Une approche continue

Dans le paragraphe précédent, nous avons fait l'hypothèse suivante : en notant Q(t) la quantité de C^{14} restante au bout du temps t, le rapport $\dfrac{Q(t+\alpha)}{Q(t)}$ est indépendant de t. Cette expression est donc une fonction de la seule quantité a, et on peut noter $\dfrac{Q(t+\alpha)}{Q(t)} = f(\alpha)$ (N.B. : on a $f(0) = 1$). De cette relation on déduit $\dfrac{Q(t+\alpha)-Q(t)}{Q(t)} = f(\alpha)-1 = f(\alpha)-f(0)$, qui peut encore s'écrire (en divisant par α) : $\dfrac{Q(t+\alpha)-Q(t)}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{Q(t)} = \dfrac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}$.

Si nous supposons en outre que la fonction f est dérivable en 0, en faisant tendre α vers 0 nous en déduisons que Q est dérivable en tout point $t \geq 0$ et nous obtenons $\dfrac{Q'(t)}{Q(t)} = f'(0)$ (c'est-à-dire une constante k). Nous sommes alors ramenés à l'équation différentielle $y' = ky$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions g définies sur **R** par $g(t) = le^{kt}$ (où l est une constante réelle). En appelant Q_0 la quantité de C^{14} à l'instant initial 0, nous obtenons que la fonction Q cherchée est la solution vérifiant $g(0) = Q_0$, et on a donc $Q(t) = Q_0e^{kt}$.

Il reste maintenant à déterminer la constante k. Si t est exprimé en années, on sait que pour t = T/2 on a $Q(T/2) = Q_0/2$. D'où $e^{kT} = 1/2$ et $k = -\dfrac{\ln 2}{T}$. (N.B. : il est normal de trouver une valeur négative pour k, puisque la quantité de C^{14} décroît avec le temps).

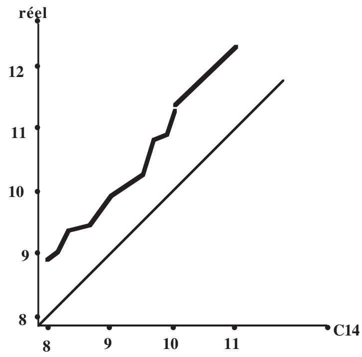
Maintenant, « retournons au charbon » pour essayer de déterminer son âge. On a $\rho = \dfrac{Q(t)}{Q(0)} = e^{kt}$, soit ici 0,316 = e^{kt}, d'où $t = \dfrac{\ln(0,316)}{k}$ $= -T\dfrac{\ln(0,316)}{\ln 2} \approx 9520$. Nous avons donc déterminé que notre échantillon a environ 9520 ans.

Remarques:

1. En fait, la méthode de datation au C^{14} (due à Willard F. Libby, prix Nobel de chimie en 1960) a été améliorée depuis sa création (vers 1950). La comparaison avec d'autres méthodes de datation (comme, par exemple, la dendrochronologie, étude de l'âge des arbres à l'aide de leurs cercles de croissance) a permis de constater que la teneur en C^{14} des êtres vivants n'est pas restée tout à fait constante au cours des âges. On a donc constitué des tables permettant de « calibrer » les résultats bruts obtenus[4]. Voici par exemple une table (très schématique) correspondant à la période qui nous occupe :

âge C^{14}	8000	8200	8400	8700	9000	9500	9700	9900	10000	11000
âge réel	8950	9050	9400	9550	9950	10300	10875	10900	11350	12250

<u>En faisant l'hypothèse d'une variation affine entre deux valeurs consécutives</u>, on en tire le graphique suivant, indiquant l'âge réel supposé en fonction de l'âge C^{14} mesuré[5] :



Âge réel BP en fonction de l'âge C^{14} BP

(les âges sont indiqués en milliers d'années)

[4] Voir l'article « calibration » (dû à Jean-Cl.aude MASSET, que je remercie ici pour son aide) dans le Dictionnaire de la Préhistoire (sous la direction d'André Leroi-Gourhan). Éd. PUF. 2e éd. 1994.

[5] En fait, le problème est moins simple que la présentation qui en est faite ici, car à une même date C^{14} peuvent correspondre plusieurs dates réelles, et inversement à une même date réelle peuvent correspondre plusieurs dates C^{14}.

On voit que l'âge réel est, pour la période considérée (mais ce n'est pas toujours le cas) supérieur à l'âge indiqué par le C^{14}, avec un écart qui peut dépasser 1000 ans.

Pour la datation qui nous occupe ici, l'âge C^{14} étant de 9520 ans BP, nous nous plaçons sur le segment dont les extrémités sont les points (9500 ; 10300) et (9700 ; 10875). Une interpolation linéaire fournit alors un âge calibré de 10360 ans BP.

2. Les fourchettes successives de l'approche discrète sont des intervalles emboîtés les uns dans les autres, et la valeur « ponctuelle » trouvée par la méthode « continue » appartient à tous ces intervalles.

3. En réalité, le rapport ρ est lui-même déterminé par un encadrement. On aurait par exemple $0{,}313 < \rho < 0{,}319$, ce qui, ramené à l'intervalle]0 ; T[, donnerait $0{,}626 < 2\rho < 0{,}638$, ce qui nous conduirait encore à l'intervalle]5T/8 ; 11T/16[, soit 9310-9670 ans BP. En ce qui concerne l'approche continue, qui fournit une valeur ponctuelle, nous obtiendrions cette fois les limites temporelles $t_+ = -\mathrm{T}\dfrac{\ln(0{,}313)}{\ln 2} \approx 9600$ et $t_- = -\mathrm{T}\dfrac{\ln(0{,}319)}{\ln 2} \approx 9450$.
La conclusion serait que l'âge C^{14} de l'objet est situé dans la fourchette 9450-9600 ans BP, d'où un âge réel (calibré) compris entre 10260 et 10600 ans BP.

4. La remarque précédente ne reflète malgré tout qu'une vision sommaire, de type déterministe, de la réalité. En fait, la transformation du C^{14} en C^{12} est un phénomène de nature statistique, et la valeur trouvée pour le rapport ρ n'est qu'une estimation de la valeur réelle de ce rapport. On fait en général l'hypothèse que la variable aléatoire qui lui correspond est gaussienne; sa distribution est donc déterminée par son espérance et son écart-type. L'espérance est estimée par la valeur trouvée pour ρ ; quant à son écart-type σ_ρ, il dépend de l'échantillon et de la technique utilisée pour déterminer ρ. D'où un nouveau type d'approche que nous allons développer.

4. Une approche statistique

Le problème est maintenant le suivant : étant donnée la valeur mesurée du rapport ainsi que son écart-type, comment déterminer l'âge d'un objet archéologique ?

Soit R la variable aléatoire « valeur du rapport du C^{14} dans l'objet » ; nous avons vu que R suit la loi normale $N(\rho,\sigma)$. Si maintenant nous appelons À la variable aléatoire « âge C^{14} de l'objet », les variables R et A sont liées par la relation R = e^{kA}. L'estimation ponctuelle de R est ρ, à laquelle correspond pour A l'estimation t_0 telle que $\rho = e^{kt_0}$.

Au voisinage de t_0 (qui est la région qui nous intéresse) on a $e^{k(t_0 + \alpha)} = e^{kt_0} \cdot e^{k\alpha} = e^{kt_0}\,[1 + k\alpha + \alpha.\varepsilon(\alpha)]$, où $\varepsilon(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers 0. On en déduit $e^{k(t_0 + \alpha)} - e^{kt_0} \approx k\ \alpha\ e^{kt_0}$. Il en résulte que l'écart-type de R est sensiblement celui de A multiplié par le coefficient $|k|\ e^{kt_0}$ c'est-à-dire qu'on a

à peu près $\sigma_A = \dfrac{\sigma_\rho}{|k|e^{kt_0}} = \dfrac{\sigma_\rho}{|k|\rho}$.

Dans l'exemple numérique choisi, supposons que l'on ait trouvé $\sigma_\rho = 0{,}006$ (on note alors, par convention : $\rho = 0{,}316 \pm 0{,}006$). On en déduit

$$\sigma_A = 0{,}006 \cdot \frac{5730}{0{,}316 \ln 2} \approx 160\,.$$

D'autre part, au voisinage du point considéré, les variables A et R sont liées par une relation affine, puisqu'on a $R \approx e^{kt_0}\,[1 + k\,(A - t_0)]$; on peut donc conclure que l'âge C^{14} de l'objet suit une loi normale. Cette loi a ici pour espérance 9520 (trouvée par l'approche déterministe) et pour écart-type 160, ce que l'on notera 9520 ± 160 ans BP.

Ceci signifie, non pas que l'âge C^{14} de l'objet est compris dans la fourchette 9360-9680 ans BP, mais que la probabilité qu'il appartienne à cet intervalle est d'environ 68 % (et qu'il y a 95 % de chances qu'il soit compris entre 9200 et 9840 ans). Après calibration, on obtient finalement :

* 68 % de chances qu'il soit situé dans la fourchette 10200-10820 ans BP.
* 95 % de chances qu'il soit situé dans la fourchette 10090-10890 ans BP.

5. Synthèse

Pour synthétiser la démarche effectuée ici, on peut dire :

1- que l'on est parti de la notion de « demi-vie » (ou « période ») T d'un élément radioactif (en l'occurrence le C^{14}) que les élèves rencontrent en chimie, ce qui conduit, en se limitant aux instants kT (k entier naturel), à utiliser la suite géométrique (u_k) des rapports.

2- que l'on a affiné ce premier modèle grossier, qui donne une « fourchette » temporelle de plus de 5000 ans, en faisant l'hypothèse que le rapport $\dfrac{Q(t+\alpha)}{Q(t)}$ (où Q(t) désigne la quantité de C^{14} subsistant au bout de la durée t) est indépendant de t. Ce rapport est donc une fonction de α (on pose $\dfrac{Q(t+\alpha)}{Q(t)} = f(\alpha)$), et l'hypothèse faite généralise la propriété initiale

définissant la demi-vie (où α = T). Ceci permet, par dichotomie, d'affiner la fourchette autant qu'on le désire (tout au moins en principe) grâce à la notion de moyenne géométrique.
3- Cependant les deux approches précédentes sont de type discret et ne fournissent qu'un intervalle temporel ; on peut tenter de trouver une approche ponctuelle (= continue) en faisant tendre α vers 0, ce qui conduit à la notion de dérivée et à faire une hypothèse supplémentaire : la dérivabilité de la fonction f au point 0. On a ensuite à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre permettant de déterminer la fonction Q.
4- Tout semble aller pour le mieux dans le meilleur des mondes possibles, et, pour nous rassurer, nous confrontons la datation par le C^{14} aux méthodes de datation directe[6]. Hélas ces méthodes viennent ruiner tous nos espoirs : il n'y a pas identité des résultats fournis. Ceci nous oblige à mettre en cause notre hypothèse initiale de la constance, au cours du temps, de la proportion de C^{14} chez les êtres vivants. Considérant que cette proportion a varié, comment nous en sortir ? Puisque l'on dispose de méthode exactes (les datations directes), on peut les utiliser pour « calibrer » les résultats obtenus par le C^{14} : on obtient alors des « points de comparaison » (couples âge réel / âge C^{14}) qui permettent, par interpolation linéaire (autre hypothèse), d'obtenir un âge réel estimé.
5- Notre problème serait-il - enfin - résolu ? Non, car tout ce qui précède repose au départ sur une autre hypothèse implicite : le rapport ρ a été mesuré exactement. Or, cette détermination est en fait de type statistique. Cela nous mène à faire une nouvelle hypothèse : le rapport suit une loi normale, dont la méthode de datation fournit l'espérance ρ (estimation ponctuelle) et l'écart-type σ_ρ. Ce qui nous conduit à déterminer la loi de l'âge C^{14} (en utilisant le résultat obtenu au 3° ci-dessus et - une fois encore - une approximation), puis à proposer une fourchette - à un risque fixé - pour cet âge, et enfin à donner la fourchette correspondante pour l'âge calibré.

La démarche ici décrite présente (de façon quelque peu schématisée, il est vrai) un raccourci de la démarche scientifique consistant à :
1) exploiter une idée confortée par l'expérience (l'hypothèse initiale faite par Libby) en lui appliquant des outils de plus en plus raffinés (ici, en analyse) dont l'emploi nécessite l'introduction d'hypothèses nouvelles ;
2) confronter les résultats obtenus à la réalité ;
3) modifier éventuellement les hypothèses faites pour tenir compte de cette réalité (etc.).

[6] Par exemple la dendrochronologie (comptage des cercles annuels sur les sections de troncs d'arbre), ainsi que le comptage des varves (dépots bisannuels de poussières à la surface des glaciers).

Cet exemple, relativement simple sans être pour autant trivial, présente à mon avis un double intérêt :

- du point de vue social et culturel, il se situe dans une « réalité » que les médias mettent fréquemment sur la sellette (Lucy, l'homme de Tautavel, la grotte Cosquer, la grotte Chauvet, ...) et il se réfère à une avancée scientifique à la fois importante (la datation d'événements antérieurs à l'histoire) et récente (à peine un demi-siècle) ;
- du point de vue de l'enseignement des mathématiques, il permet, non seulement d'utiliser des outils d'analyse variés s'étendant sur tout le second cycle secondaire, mais aussi de montrer leur intérêt et leurs limites. On peut seulement regretter que la loi normale ne figure pas (pas encore ?) au programme des lycées. Mais au troisième millénaire, qui sait ?