Dans nos classes : Lycée

Composée d'homothéties et théorème de Céva

Richard Blavy
Lycée Agricole, Toulouse

Dans le précédent bulletin, nous avons donné une démonstration du théorème de Ménélaüs. Dans le même esprit, nous donnons ici une démonstration du

Théorème de Céva. Soient un triangle ABC et trois points I, J et K situés respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB) et distincts des sommets du triangle. Les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{\mathrm{IB}}}{\overline{\mathrm{IC}}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{JC}}}{\overline{\mathrm{JA}}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{KA}}}{\overline{\mathrm{KB}}} = -1 .$$

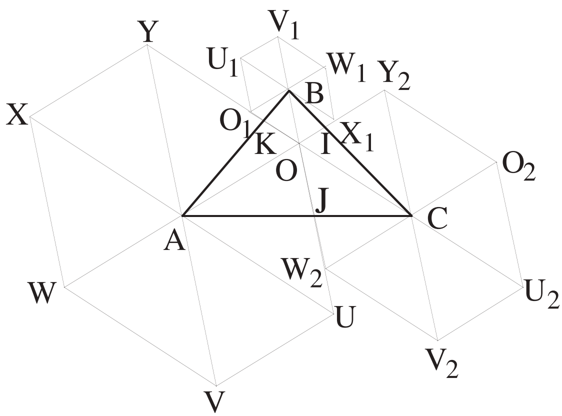
Le parti-pris est de raisonner géométriquement sans recours aux nombres réels. Dans l'énoncé classique, on utilise les mesures algébriques, ce qui semble faire intervenir un ordre sur les droites dans le plan ; ceci n'apparaît pas dans notre démonstration. Les homothéties et les translations sont les outils essentiels.

On considère les homothéties h_I, h_J et h_K :
h_I, de centre I, envoie B sur C ;

h_J, de centre J, envoie C sur A ;
h_K, de centre K, envoie A sur B.
$h = h_J \circ h_I \circ h_K$ est donc une homothétie de centre A.

Théorème 1. Si les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes, alors $h = h_J \circ h_I \circ h_K$ est la symétrie par rapport au point A.

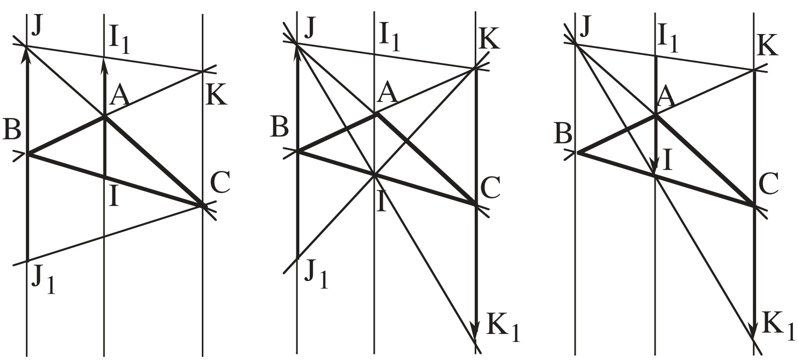
Si les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en O, on peut alors construire les hexagones comme le montre la figure.



Les points O, U, V, W, X et Y ont pour images respectives par h_K : O_1, U_1, V_1, W_1, X_1 et O. h_I transforme ces derniers points en : O_2, U_2, V_2, W_2, O et Y_2 que h_J transforme en : W, X, Y, O, U et V.

L'hexagone OUVWXY a pour image par h l'hexagone WXYOUV. On en conclut que ***h* est la symétrie par rapport au point A**.

Théorème 2. Si les droites (AI), (BJ) et (CK) sont parallèles, alors $h = h_J \circ h_I \circ h_K$ est la symétrie par rapport au point A.



Si les droites AI, BJ et CK sont parallèles, on notera $I_1 = h_J(K)$, $J_1 = h_K(I)$ et $K_1 = h_I(J)$.

Les points A, I et I_1 ont pour images respectives par h_K : B, J_1 et J ; h_I transforme ces derniers points en : C, K et K_1 que h_J transforme en : A, I_1 et I.

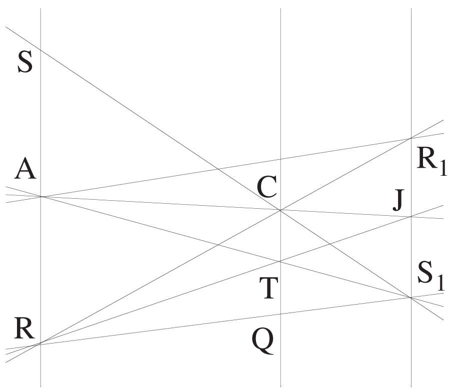
L'homothétie h a donc pour centre le point A et échange les points I et I_1. ***h* est donc la symétrie s_A par rapport au point A**.

Théorème 3 : Réciproque. Si $h = h_J \circ h_I \circ h_K$ est la symétrie par rapport au point A, alors les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes ou parallèles.

Lemme. Les points A, C et J sont alignés. Si f_A est l'homothétie de centre A qui envoie J sur C, f_C l'homothétie de centre C qui envoie A sur J et h_J l'homothétie de centre J qui envoie C sur A, alors $h_J \circ f_A \circ f_C$ est la symétrie s_A par rapport au point A.

On vérifie d'abord que $h_J \circ f_A \circ f_C(A) = A$.

On considère un point S extérieur à la droite (AC) et $R = s_A(S)$. On va montrer que $h_J \circ f_A \circ f_C(S) = R$.



Soient J, R_1 et S_1 les images des points A, R et S par l'homothétie f_C. A étant le milieu de RS, J est le milieu de R_1S_1.

On considère l'homothétie h_R de centre R qui transforme R_1 en C. Soient $Q = h_R(S_1)$ et $T = h_R(J)$. J étant le milieu de R_1S_1, T est le milieu de CQ. Le point T est situé sur les droites (JR) et (CQ).

On considère l'homothétie h_{S_1} de centre S_1 qui transforme S et R en C et Q. Le milieu A de RS a pour image par h_{S_1} le milieu T de CQ. Le point T se trouve aussi sur la droite (AS_1).

Dans ces conditions

$$S \overset{f_C}{\longmapsto} S_1 \overset{f_A}{\longmapsto} T \overset{h_I}{\longmapsto} R$$

On a montré que $h_J \circ f_A \circ f_C(S) = R$, on en conclut que $h_J \circ f_A \circ f_C = s_A$.

Démonstration du théorème 3.

Si $h = h_J \circ h_I \circ h_K = s_A$, on en déduit que $h_J \circ h_I \circ h_K = h_J \circ f_A \circ f_C$ et $h_I \circ h_K = f_A \circ f_C$. Finalement, $f_A^{-1} \circ h_I = f_C \circ h_K^{-1}$. Notons g cette dernière application. Remarquons que I, $g(I) = f_A^{-1}(I)$ et A sont alignés. De même K, $g(K) = f_C(K)$ et C sont alignés. Remarquons aussi que $g(B) = f_A^{-1} \circ h_I(B) = J$.

Dans le cas où g est une translation, la direction de la translation est celle des droites (AI), (BJ) et (CK). **Conclusion : les droites (AI), (BJ) et (CK) sont parallèles.**

Dans le cas où g est une homothétie, le centre U se trouve sur les droites (AI), (BJ) et (CK). **Conclusion : les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.**