

# *Dossier : Autour de la démonstration*

---

## Démonstration automatique en géométrie : une approche par la géométrie analytique

Jean Mainguéné,  
Marie-Françoise Roy

**Résumé.** *Après un petit rappel historique, on présente la méthode de Wu, qui est une des méthodes de démonstration automatique en géométrie et on l'illustre par un exemple tiré d'un manuel scolaire. Des résultats récents concernant les inégalités en géométrie élémentaire par le calcul formel sont ensuite présentés.*

### **1. Bref historique**

Il s'agit de réaliser « le rêve de Descartes » : « remplacer les démonstrations de géométrie par les calculs » en utilisant des coordonnées cartésiennes.

Descartes proposait, dans ses ouvrages « Règles pour la direction de l'esprit » et « Discours de la méthode », la démarche suivante :

- Ramener d'abord tout problème à un problème mathématique.
- Ramener ensuite tout problème mathématique à un problème d'algèbre.
- Ramener enfin tout problème d'algèbre à la résolution d'une seule équation.

Cette tradition historique est présente ailleurs, notamment en Chine où on ne trouve pas de démonstration au sens de la géométrie grecque, mais beaucoup de calculs (des calculs de déterminants, par exemple...).

Cette tendance se développe dans les mathématiques occidentales grâce aux succès de la géométrie analytique aux 18<sup>e</sup> et 19<sup>e</sup> siècles.

Avec le développement de la logique mathématique au 20<sup>e</sup> siècle, des théorèmes généraux comme le principe de Tarski-Seidenberg, établi autour des années 1930, mais publié vers 1950, montrent qu'on peut décider mécaniquement des classes très générales d'énoncés dans la géométrie réelle.

Sans ordinateurs, les calculs étaient beaucoup trop compliqués. Avec l'apparition des ordinateurs, les choses se sont précisées petit à petit.

Les premiers essais datent de 1960 : on essaye de déduire tous les théorèmes à partir des axiomes. Il y a peu de chances d'arriver rapidement à quelque chose d'intéressant.

Au milieu des années 70, se développent deux méthodes qui reposent sur des calculs algébriques plutôt que sur des déductions :

- la méthode des bases de Gröbner, due à Buchberger,
- la méthode de Wu.

Nous présentons ici la méthode de Wu qui est particulièrement adaptée aux problèmes de la géométrie.

Wu est un mathématicien qui appartient à l'Académie des Sciences de Pékin. Il étudie aussi l'histoire des mathématiques chinoises et se place explicitement dans la tradition « calculatoire » que nous venons de rappeler.

Le principe de la méthode de Wu :

- on a des hypothèses et une conclusion ;
- on les traduit en égalités ;
- on réarrange l'ensemble des hypothèses, en les mettant sous forme triangulaire, pour que chaque nouvelle équation corresponde à une nouvelle variable ;
- on divise la conclusion par les hypothèses ;
- si le reste est nul, le théorème est vrai.

Dans cette méthode, on part déjà d'une conclusion que l'on veut démontrer. On ne découvre donc pas de conclusions inattendues.

La démonstration du théorème de Feuerbach figure comme exemple dans les premiers papiers de Wu.

En 1984, Chou Shang-Ching, élève de Wu installé au Texas, décrit l'implantation en Pascal de la méthode de Wu, ce qui a permis de prouver 130 théorèmes parmi lesquels ceux de Simson, Pappus, Desargues, Euler, Pascal et celui du cercle des neuf points. Une remarque intéressante est que, lorsque l'on construit une figure en ajoutant les points au fur et à mesure, il semble relativement facile d'obtenir un ensemble triangulaire de polynômes. En 1988, Chou publie un livre, « Mechanical geometry theorem proving » [2], ouvrage alors très complet sur la méthode de Wu et comportant la liste de 512 théorèmes démontrés par cette méthode, ainsi qu'une comparaison avec la méthode utilisant les bases de Gröbner.

Citons un résultat que l'on peut prouver par cette méthode.

**Le théorème de Morley :** *les trois points d'intersection des trisecteurs adjacents d'un triangle forment un triangle équilatéral.*

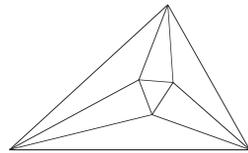


Figure 1

Cette élégante propriété a été découverte par F. Morley en 1899. Dix ans plus tard, Satyanarayana en apporte une preuve à base de calculs trigonométriques. Une autre preuve, avec des moyens plus élémentaires, fut apportée par Naraniega. Il est remarquable que la démonstration par Chou de ce théorème a aussi permis de le généraliser : sur les 27 triangles obtenus à partir des trisecteurs, il y en a 18 qui sont équilatéraux.

Les problèmes géométriques ne s'expriment pas seulement par des égalités : quelquefois on s'intéresse seulement aux solutions réelles, ou on veut étudier des inégalités. Il y a alors souvent plusieurs cas distincts, dépendant, par exemple, de la forme d'un triangle. De tels cas ne sont pas accessibles à la méthode de Wu et nécessitent le développement de méthodes spécifiques que nous évoquons dans la suite. Il s'agit essentiellement d'étudier des courbes algébriques réelles dans le plan.

## 2. Présentation de la méthode de Wu

On part d'un ensemble d'hypothèses et d'une conclusion. La méthode de Wu comporte quatre parties :

1 - *Conversion d'un énoncé géométrique en équations polynomiales.*

Après avoir choisi un système de coordonnées, il faut écrire les hypothèses et la conclusion sous la forme d'équations polynomiales dont les

termes sont dans  $Q[u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_n]$ , où les  $u_i$  sont les paramètres indépendants, correspondant aux données de départ que l'on fixe arbitrairement, et les  $x_i$  les variables correspondant aux points que l'on construit (voir l'exemple).

2 - *Mise sous forme triangulaire.*

Les hypothèses sont réarrangées pour qu'à chaque nouvelle hypothèse corresponde une nouvelle variable (voir l'exemple). On utilise la pseudo-division comme opération de base : à deux polynômes de la variable  $x$ ,  $f$  (avec  $b$  son coefficient dominant) et  $g$ , elle permet d'associer deux polynômes  $q$  et  $r$  (appelé pseudo-reste de  $(g, f, x)$ ) tels que :

$$b^s g = qf + r \text{ avec } s = \deg_x(g) - \deg_x(f) + 1 \text{ et } \deg_x(r) < \deg_x(f).$$

Dans la division habituelle des polynômes, il apparaît des dénominateurs, mais il est facile de voir que tous les dénominateurs qui apparaissent sont de la forme  $b^r$  avec  $r \leq s$ . La pseudo-division a donc pour effet de supprimer les dénominateurs.

3 - *Division de la conclusion.*

On peut définir de manière récursive le pseudo-reste d'un polynôme  $g$  et d'un  $r$ -uplet de polynômes à plusieurs indéterminées  $(f_1, \dots, f_r)$  de variables successives respectives  $x_1, \dots, x_r$ , et on obtient la « formule du reste » :

$$c_1 \dots c_r g = q_1 f_1 + \dots + q_r f_r + R$$

où les  $c_i$  et les  $q_i$  sont des polynômes et  $R$  est le reste.

Si le reste est nul, la conclusion est conséquence des hypothèses. La méthode surprend. Pourquoi la nullité du reste démontre-t-elle que la conclusion proposée est une conséquence des hypothèses ? Tout simplement, parce que si  $R$  est le polynôme identiquement nul, alors la « formule du reste » nous dit que  $(f_1(x) = f_r(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0)$  pour les valeurs de  $x$  qui n'annulent pas les  $c_i$ . Autrement dit, si le reste est nul, on peut conclure que le théorème est vrai (hors les conditions de dégénérescence correspondant à l'annulation des  $c_i$ ).

Si le reste n'est pas nul, on ne peut pas en général conclure ; il arrive que la conclusion soit fausse, ou que le théorème soit vrai dans certains cas, et il faut pour conclure faire d'autres calculs.

4 - *Analyse des conditions de dégénérescence.*

Il s'agit ici d'interpréter géométriquement les conditions de dégénérescence apparues dans les calculs. Ceci peut être simple, comme une condition de non parallélisme, ou beaucoup plus compliqué. Le fait qu'il y ait une interprétation géométrique de ces cas particuliers n'est pas garanti.

La méthode de Wu est donc une méthode qui ramène certaines démonstrations compliquées de géométrie à un pur calcul algébrique. Ce calcul peut être long à mettre en œuvre, mais il est entièrement mécanisable.

### 3. Un exemple d'utilisation de la méthode de Wu

Dans un manuel de classe de sixième [1], on trouve une situation qui va nous servir d'exemple pour l'utilisation de la méthode de Wu. Voici le texte de l'exercice :

*Dessine deux demi-droites Ax et Ay (attention : c'est le même point A). Marque trois points B, C, E sur la demi-droite Ax et trois points B', C', E' sur la demi-droite Ay.*

*Soit L le point commun aux droites (BC') et (CB'), M le point commun aux droites (BE') et (EB'), N le point commun aux droites (CE') et (EC'). Luc dit que les points L, M, N, ne lui semblent pas alignés. L'approuves-tu ?*

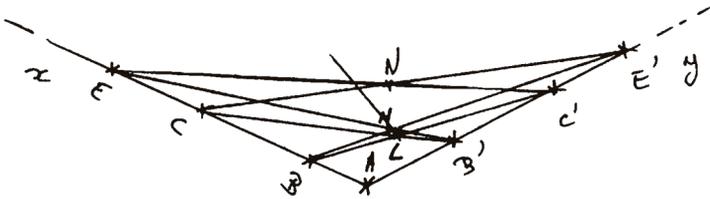


Figure 2, par un élève de sixième.

On aura reconnu une forme faible du théorème de Pappus qui peut se démontrer à l'aide du théorème de Ménélaüs ou encore en prenant des coordonnées avec les méthodes habituelles de géométrie analytique (mais c'est long). Ce problème va donc nous servir à illustrer la méthode de Wu puisque nous avons des hypothèses et une conclusion à vérifier.

On suppose les points A, B et B' non alignés, et on prend le repère (A, B, B'). Alors nous pouvons écrire les coordonnées des points :

- A(0,0), B(1,0), B'(0,1), C( $u_1, 0$ ), C'(0, $u_2$ ), E( $u_3, 0$ ) et E'(0, $u_4$ ) où les  $u_i$  sont des paramètres réels qui peuvent être choisis arbitrairement ;

- L( $x_1, x_2$ ), M( $x_3, x_4$ ) et N( $x_5, x_6$ ) où les  $x_i$  sont des variables correspondant aux points qu'on a construits, et qui dépendent donc algébriquement des paramètres.

Les hypothèses, mises sous forme algébrique, sont alors :

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h_6 = 0$$

avec

$$h_1 := u_2(x_1 - 1) + x_2 ;$$

$$h_2 := x_1 + u_1(x_2 - 1) ;$$

$$h_3 := u_4(x_3 - 1) + x_4 ;$$

$$h_4 := x_3 + u_3(x_4 - 1) ;$$

$$L \in (BC'),$$

$$L \in (CB'),$$

$$M \in (BE'),$$

$$M \in (EB'),$$

$$\begin{aligned} h_5 &:= u_4(x_5 - u_1) + u_1x_6 ; & N \in (CE'), \\ h_6 &:= u_3(x_6 - u_2) + u_2x_5 ; & N \in (EC'). \end{aligned}$$

La conclusion

$$g := (x_1 - x_3)(x_2 - x_6) - (x_2 - x_4)(x_1 - x_5)$$

exprime que les points L, M et N sont alignés.

Il faut maintenant mettre le système sous une forme « triangulaire » ; dans ce cas précis, il suffit de remplacer les trois polynômes  $h_1$ ,  $h_3$  et  $h_5$  par des combinaisons linéaires respectivement de  $h_1$  et  $h_2$ ,  $h_3$  et  $h_4$ ,  $h_5$  et  $h_6$ . Par exemple,  $h_5$  sera remplacé par le pseudo-reste de  $h_6$  par  $h_5$  par rapport à la variable  $x_6$ . Comme

$$u_3h_5 = u_1h_6 + (u_3u_4 - u_1u_2)x_5 + u_1u_2u_3 + u_1u_3u_4,$$

on remplace  $h_5$  par  $f_5 := (u_3u_4 - u_1u_2)x_5 + u_1u_2u_3 + u_1u_3u_4$  qui ne dépend plus que de  $x_5$  et plus de  $x_6$ . Le coefficient dominant de  $f_5$  est  $u_3u_4 - u_1u_2$  : il ne s'annule que lorsque les points C, E, C' et E' sont colinéaires. L'interprétation en est donc simple : c'est une des conditions de non-dégénérescence. On procède de manière similaire pour  $h_1$  et  $h_3$  et on appelle  $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$  le nouveau système ainsi obtenu.

La mise sous forme triangulaire est rarement aussi facile que dans l'exemple précédent, mais le principe de base reste le même.

Ensuite, on calcule les pseudo-restes successifs, en commençant par  $r_5 := \text{pseudo-reste}(g, f_6, x_6)$ , puis en continuant jusqu'à  $r_0 := \text{pseudo-reste}(r_1, f_1, x_1)$ . Les calculs deviennent ensuite beaucoup plus longs, mais on trouve pour dernier résultat 0. Les calculs nécessitent l'utilisation d'un ordinateur et d'un langage de calcul formel tel que MAPLE ([8] et [11]). D'après la formule des restes, nous pouvons déduire que notre conclusion est la conséquence des hypothèses sous certaines conditions de non-dégénérescence.

#### 4. Comparaison des rayons du cercle d'Euler et des cercles tritangents

Les situations géométriques traitées par la méthode de Wu concernent les égalités. Or on rencontre aussi des inégalités en géométrie.

On sait que le rayon du cercle inscrit n'est pas plus grand que la moitié du rayon du cercle circonscrit (autrement dit le rayon du cercle d'Euler ou des neuf points). Si l'on veut démontrer cette propriété analytiquement, on doit travailler avec les rayons des quatre cercles tritangents (le cercle inscrit et les trois cercles exinscrits) car, algébriquement, on ne peut les distinguer. Ce travail, fait par A. Guergueb dans sa thèse à l'Université de Rennes, a en fait permis d'obtenir un énoncé plus général que voici :

*Dans un triangle non aplati et non équilatéral, il y a un, deux ou trois, mais jamais ni zéro, ni quatre cercles tritangents dont le rayon soit strictement plus petit que celui du cercle d'Euler. Dans un triangle équilatéral, les cercles inscrit et d'Euler sont confondus et strictement plus petits que les trois cercles exinscrits.*

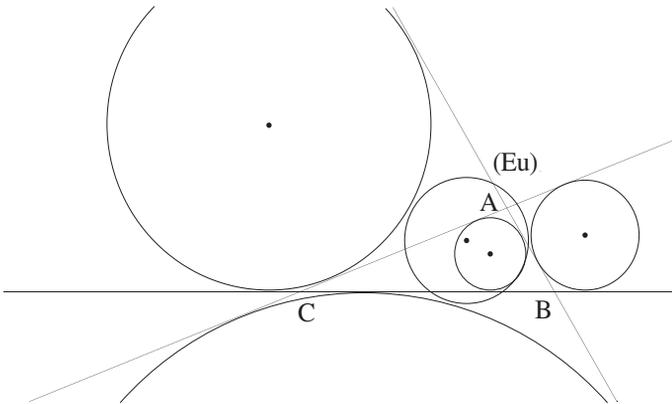


Figure 3 : Les quatre cercles tritangents et le cercle d'Euler

Pour comparer les rayons, on va chercher à déterminer les équations qu'ils vérifient. On choisit un repère orthonormé tel que les points A, B et C aient pour coordonnées respectives  $(u_1, u_2)$ ,  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$  où  $u_1$  et  $u_2$  sont des paramètres indépendants des constructions ultérieures. Les triangles sont donc paramétrés par les points du plan. On notera  $O_i(x_2, x_1)$  le centre du cercle inscrit ; il est déterminé par les équations  $h_1 = h_2 = 0$  :

$$h_1 := (u_2(x_2 + 1) - x_1(u_1 + 1))^2 - x_1^2(u_2^2 + (u_1 + 1)^2),$$

$$d(O_i, (AC)) = d(O_i, (BC)),$$

$$h_2 := (u_2(x_2 - 1) - x_1(u_1 - 1))^2 - x_1^2(u_2^2 + (u_1 - 1)^2),$$

$$d(O_i, (AB)) = d(O_i, (BC)).$$

On remarque que le rayon du cercle inscrit est la valeur absolue de l'ordonnée de  $O_i$  (d'où le choix de la notation  $x_1$ ).

En combinant  $h_1$  et  $h_2$  pour faire apparaître une équation dépendant seulement de  $x_1$ , on trouve

$$j = -u_2^3 + 4u_2^2x_1 + u_2^3x_1^2 - 5u_2x_1^2 - 2u_2^2x_1^3 + 2x_1^3 + u_2x_1^4 + u_1^2u_2x_1^2 - 2u_1^2x_1^3.$$

L'équation  $j = 0$  est donc l'équation des quatre ordonnées des centres des cercles tritangents, dans tous les cas de triangle non aplati. Les valeurs absolues des solutions représentent donc les rayons des cercles tritangents.

On note  $(u_1, x_3)$  les coordonnées du milieu de AH (où H est l'orthocentre). Alors :

$$x_3 = \frac{1}{2} \frac{-u_1^2 + u_2^2 + u_1^2 u_2}{u_2}.$$

Le carré du diamètre du cercle d'Euler est donc  $x_3^2 + u_1^2$ .

L'équation, dont les deux racines sont le rayon du cercle d'Euler et son opposé est donc  $k = 0$  avec :

$$k = 4u_1^2 u_2^2 + (-u_1^2 + u_2^2 + 1)^2 - 16u_2^2 x^2.$$

L'égalité du rayon du cercle d'Euler avec le rayon d'un cercle tritangent signifie donc exactement que les polynômes  $j$  et  $k$  ont une racine commune. Il suffit de calculer le résultant de ces deux polynômes par rapport à la variable  $x$  (cf. [7]) pour déterminer cette condition. On a :

$$\text{Res}(j, k) = u_2^2 K_2(u_1, u_2) K_3(u_1, u_2)$$

où  $K_2$  et  $K_3$  sont des polynômes en  $u_1$  et  $u_2$  irréductibles :

$$K_2(u_1, u_2)$$

$$= 9 - 20u_2^2 u_1^4 - 36u_1^2 - 116u_1^2 u_2^2 + 84u_2^2 + 54u_1^4 + 166u_2^4 + 52u_1^6 u_2^2 - 104u_2^6 + 102u_1^4 u_2^4 + 25u_2^8 + 132u_1^2 u_2^4 + 84u_1^2 u_2^6 + 9u_1^8 - 36u_1^6$$

$$K_3(u_1, u_2)$$

$$= 44u_2^2 u_1^4 + 28u_1^2 - 52u_1^2 u_2^2 + 20u_2^2 - 42u_1^4 + 70u_2^4 - 12u_1^6 u_2^2 - 204u_2^6 + 6u_1^4 u_2^4 + 9u_2^8 + 68u_1^2 u_2^4 + 20u_1^2 u_2^6 - 7u_1^8 + 28u_1^6 - 7.$$

Les polynômes déterminent deux courbes algébriques du huitième degré qui représentent (hormis les cas de dégénérescence pour lesquels les calculs ne sont pas valables) l'ensemble des sommets A des triangles, dont au moins un des cercles tritangents a même rayon que le cercle d'Euler.

Les rayons des cercles considérés sont des solutions de systèmes d'équations polynomiales et leur différence ne peut changer de signe qu'en passant par zéro : les inégalités entre rayons restent donc valides sur chaque composante connexe du complémentaire de ces courbes. Il suffit alors, pour déterminer les inégalités, de prendre un point test dans chaque composante connexe du complémentaire de ces courbes.

Il faut maintenant étudier ces deux courbes. La courbe algébrique réelle

$K_2(x,y) = 0$  ne comporte que quatre points :  $(-1,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,\sqrt{3})$  et  $(0,-\sqrt{3})$ .

L'étude de la courbe algébrique réelle  $K_3(x,y) = 0$ , quant à elle, nécessite beaucoup plus de calculs. Cette courbe délimite 11 composantes connexes (voir figure 4).

Cette étude nous permet d'énoncer :

Soit un triangle ABC, dont les sommets ont respectivement pour coordonnées  $(u_1,u_2)$ ,  $(1,0)$  et  $(-1,0)$  avec  $u_1, u_2$  des nombres réels et  $u_2 \neq 0$ .

i) Il n'y a aucun cercle tritangent strictement plus petit que le cercle d'Euler si et seulement si  $(u_1,u_2) = (0,\sqrt{3})$  ou  $(u_1,u_2) = (0,-\sqrt{3})$  ; dans ce cas, le triangle est équilatéral et les cercles d'Euler et inscrit sont confondus.

ii) Il y a exactement un, deux ou trois cercles tritangents de rayon strictement inférieur au rayon du cercle d'Euler si et seulement si le sommet A est élément des composantes connexes ouvertes des ensembles semi-algébriques indiqués sur la figure 6.

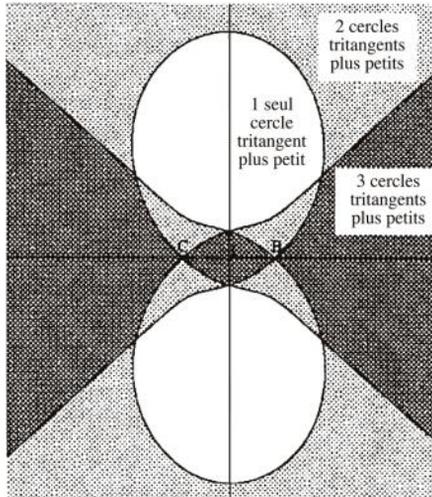


Figure 4

iii) Il y a égalité entre le rayon du cercle d'Euler et le rayon de l'un au moins des cercles tritangents si et seulement si le sommet A est élément de la courbe  $K_3(u_1,u_2) = 0$  (à l'exception des points B et C), ou si ABC est équilatéral.

## 5. D'autres résultats en géométrie réelle

Avec les mêmes outils que précédemment, méthode de Wu et étude de courbes algébriques réelles, on peut trouver d'autres résultats liés au triangle, en particulier en essayant de comparer les rayons d'autres cercles : peut-on trouver d'autres cercles que le cercle d'Euler dont les rayons se comportent de la même manière vis-à-vis des rayons des cercles tritangents ?

*Le cercle de Taylor.*

Soit un triangle  $ABC$ . On projette les pieds des trois hauteurs  $H_A, H_B, H_C$  respectivement sur les deux autres côtés. On obtient six points qui sont cocycliques, le cercle ainsi défini porte le nom de cercle de Taylor.

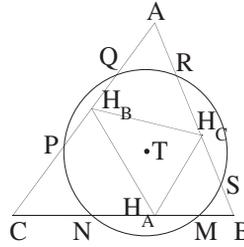


Figure 5 : Le triangle orthique et le cercle de Taylor

Si on compare les rayons des cercles de Taylor et d'Euler, on obtient une courbe algébrique de degré 8 qui représente l'ensemble des sommets  $A$  du triangle pour lesquels il y a égalité.

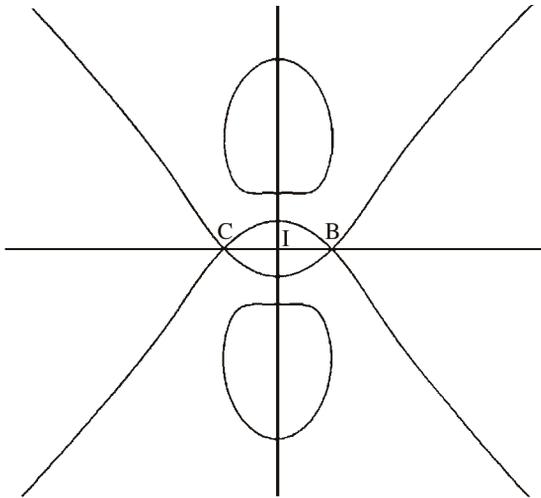


Figure 6

On peut aussi comparer les rayons des cercles tritangents avec le rayon du cercle de Taylor, ce qui donne une partition du plan par une courbe algébrique réelle de degré 32. On obtient ainsi le résultat suivant (Jean Mainguené, Thèse de l'Université de Rennes) :

*Dans un triangle non aplati, il y a un, deux ou trois, mais jamais ni zéro, ni quatre cercles tritangents dont le rayon soit strictement plus petit que celui du cercle de Taylor.*

Le fameux « triangle quelconque » de l'APMEP (cf [9]) qui n'est ni trop équilatéral, ni trop isocèle, ni trop rectangle, ni trop aplati non plus, pour

qu'on puisse voir les points que l'on construit n'est plus quelconque du point de vue des résultats précédents, puisque ces résultats disent qu'il y a plusieurs cas distincts, et qu'un triangle particulier ne peut en illustrer qu'un.

## 6. Le calcul formel pour prouver en géométrie ?

Il n'est plus utile d'insister sur l'importance du calcul formel et des logiciels qui permettent sa mise en pratique aussi bien pour les calculs algébriques ou analytiques dans l'enseignement (voir [3], [5] et [6]) que dans la recherche. En ce qui concerne la géométrie, comment envisager une utilisation éventuelle des méthodes précédentes dans l'enseignement ?

Elles nous semblent avoir tout naturellement leur place dans la formation des futurs mathématiciens et enseignants de mathématique, ainsi que dans la formation permanente. On est loin du compte aujourd'hui puisque, dans plusieurs IUFM, les futurs enseignants ne voient jamais de logiciel de calcul formel, ni de logiciel de constructions géométriques.

Plus généralement, deux aspects nous semblent importants à explorer :

- La possibilité de l'apprentissage de la notion de preuve par le changement de cadre géométrique/algébrique dans des cas non triviaux.

- L'utilisation de procédures toutes faites que l'on peut utiliser comme une boîte noire jouant le rôle d'un oracle pour décider si une conjecture est valide ou non. C'est une méthode qui permet une exploration de la géométrie basée sur essai/conjecture/validation.

## Références bibliographiques

[1] H. BAREIL ET C. ZEHREN. *Mathématiques Classe de 6ème*. Hachette Classiques - Paris (1986).

[2] SHANG-CHING CHOU. *Mechanical Geometry Theorem Proving*. D. Reidel publishing company - Dordrecht (1988).

[3] COLLECTIF. *Actes de l'université d'été du 29 août 2 septembre 1994 CAEN - Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques*. IREM de Basse Normandie (1994).

[4] COLLECTIF. *Histoires d'algorithmes*. Collection Regard sur la science - Belin - Paris (1994).

[5] COLLECTIF. *Des outils pour le calcul et le traçage de courbes*. Les dossiers de l'ingénierie éducative - CNDP - Paris (1995).

Bulletin de l'APMEP n°421 - Mars/Avril 1999

[6] COLLECTIF. *Enseignement des mathématiques et logiciels de calcul formel - DERIVE, un outil à intégrer*. Ministère de l'Éducation Nationale - DLC 15 - Paris (1995).

[7] J. DAVENPORT, SIRET, E. TOURNIER. *Calcul formel*. Masson - Paris (1987).

[8] P. FORTIN, R. POMES. *Premiers pas en MAPLE*. Série Méthode et applications - Vuibert Supérieur - Paris (1994).

[9] J. LUBCZANSKI. *Comment réussir un triangle quelconque*. in Bulletin de l'APMEP - Février 1985 n° 347 - Paris (1985).

[10] M.F. ROY. *Démonstration automatique en géométrie : une approche par l'algèbre*. in La démonstration mathématique dans l'histoire (Actes du 7<sup>e</sup> colloque inter-IREM) - IREM de Lyon (1989).

[11] J. ZIZI. *Mathématiques, informatique et enseignement - Calcul symbolique et formel pour réfléchir*. Éditions du choix. Éditions Archimède - Argenteuil (1993).