Dossier : Autour de la démonstration

Démonstration et Argumentation

Denise Haugazeau

Résumé : *Les différences entre démonstration et argumentation sont d'abord présentées et commentées. Suit une expérience interdisciplinaire qui les a fait assimiler.*

Dès son plus jeune âge, l'enfant exerce ses facultés de raisonnement. Afin d'appréhender ce qui l'entoure, il se forge des outils de pensée et ses proches ne ménagent pas leurs efforts pour l'y aider.

Communiquer du raisonnement et raisonner pour bien communiquer se répondent.

Bientôt l'école élémentaire formera l'élève à expliquer ses perceptions et, entre autres, sa démarche de recherche, son « raisonnement », devant les situations qui lui seront proposées à cet effet.

Au collège, l'apprentissage du raisonnement se poursuit. Peu à peu l'élève est amené à distinguer entre ce qu'il sait ou croit « d'instinct » (par habitude) et ce à quoi il accède au terme d'une réflexion fondée sur un « raisonnement ».

Toutefois l'exercice se différencie d'une discipline à une autre. En Français, il consiste à progresser dans la construction et l'expression d'une argumentation. Le but en mathématiques est de parvenir par paliers à la maîtrise de la démonstration. Une progression possible de cet apprentissage propre aux mathématiques étendue sur les quatre années du collège est proposée dans l'article *Mathématiques et langage* du livre coordonné par Pierre Legrand.

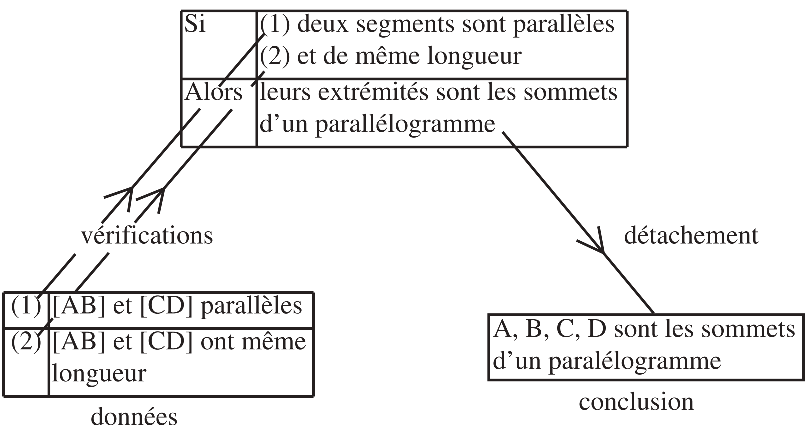
Le professeur de mathématiques est conduit à faire prendre une conscience claire de ce que démonstration et argumentation diffèrent profondément malgré l'utilisation d'un vocabulaire en partie commun (« donc », « ainsi », ...).

La <u>démonstration</u>, sous sa forme purement déductive pour commencer, s'articule en pas.

Chaque pas fonctionne selon un schéma immuable. Un théorème est utilisé (il peut même s'agir d'une simple définition).

Chaque pas de démonstration isolé consiste à vérifier que les données (ou conclusions du pas antérieur promues de ce fait en données acquises) satisfont les hypothèses d'un théorème invoqué. Alors la conclusion voulue dans la situation particulière que constitue le pas en question se « détache » de celle, générale, du théorème (règle dite du *détachement* ou du *modus ponens*).

<u>Une illustration triviale.</u>



Dans un problème plus complexe, c'est l'enchaînement de pas élémentaires comme celui-ci qui démontre le résultat attendu.

<u>Second exemple</u> avec quatre pas élémentaires.

Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

<u>Pas n° 1</u>

Si	(1) A = B (2) C = D
Alors	A + C = B + D

vérifications — *détachement*

(1)	[illegible]
(2)	[illegible]

$2x = 6$

<u>Pas n° 2</u>

Si	(1) U = V (2) $r \neq 0$
Alors	$\dfrac{\mathrm{U}}{r} = \dfrac{\mathrm{V}}{r}$

vérifications — *détachement*

(1)	$2x = 6$
(2)	$2 \neq 0$

$x = 3$

<u>Pas n° 3</u> (à comparer avec le pas n° 1)

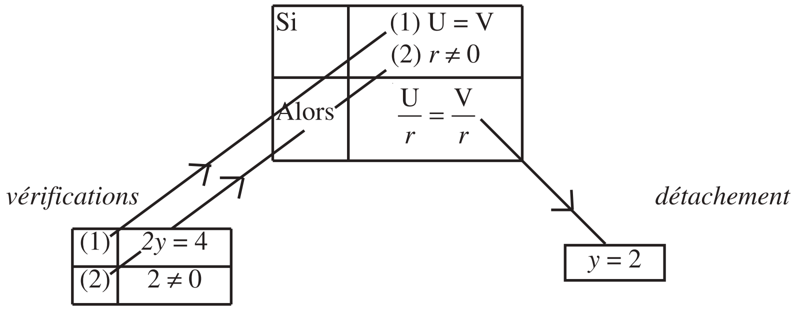
Si	(1) A = B (2) C = D
Alors	A − C = B − D

vérifications — *détachement*

(1)	$x + y = 5$
(2)	$x - y = 1$

$2y = 4$

<u>Pas n° 4</u> (à comparer avec le pas n° 2)



Noter que ce raisonnement déductif en quatre pas élémentaires n'a établi que des conditions nécessaires ! La vérification que le couple $x = 3$, $y = 2$ est solution (condition suffisante) reste à faire.

Noter par ailleurs dans cet exemple que les pas peuvent être ordonnés autrement, <u>mais nullement de façon arbitraire</u>, la conclusion de l'actuel pas n° 1 étant prémisse dans l'actuel pas n° 2 et la conclusion de l'actuel pas n° 3 étant prémisse dans l'actuel pas n° 4.

Enfin, quant à procéder par équivalence de systèmes, il n'est peut-être pas superflu de s'interroger pour savoir à quel stade de l'apprentissage du raisonnement la notion d'équivalence (deux déductions) est pleinement assimilée.

De façon générale, plusieurs façons de mener une démonstration ou plusieurs démonstrations peuvent atteindre la conclusion.

- Chacune convient et suffit -

C'est là une caractéristique de la démonstration.

<u>L'argumentation</u>, elle, prend place dans des situations où l'on veut persuader un interlocuteur ou réfuter une thèse. Par essence le discours argumentatif suppose un émetteur et un récepteur ; il a pour objet de modifier ou conforter les opinions, les croyances de celui (ceux) auquel il s'adresse en sollicitant son (leur) adhésion et, souvent, tend à provoquer une action.

L'analyse d'un discours argumentatif conduit aussi à distinguer des pas de raisonnement. Toutefois la nature d'un pas d'argumentation diffère considérablement de celle d'un pas déductif.

Certes des liens sont établis entre trois propositions énoncées (prémisse, conclusion, énoncé tiers). Ils portent seulement sur des contenus.

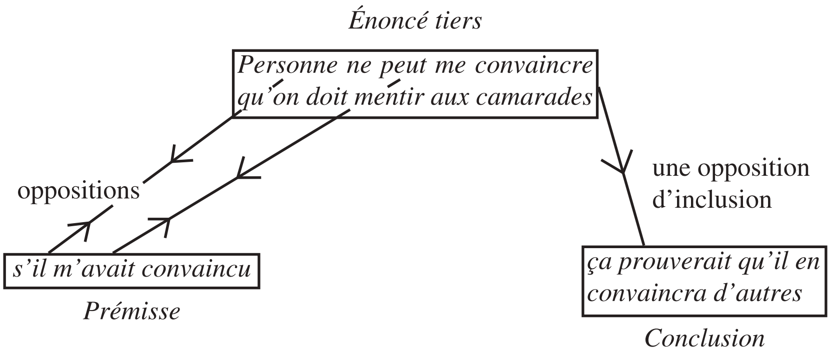
Et surtout l'énoncé tiers n'est pas une règle (irréfutable, extraite d'un corpus de définitions et de théorèmes).

L'énoncé tiers est ici une « certitude » pour l'émetteur. Il peut ne pas l'être pour le récepteur.

En outre les liens entre prémisse et énoncé tiers, de même que ceux entre énoncé tiers et conclusion ne sont pas nécessairement à sens unique (oppositions, inclusion, synonymie, ...), ce qui apparaît, par exemple, dans le pas d'argumentation cité par Ch. Perelman, extrait des *Mains sales* de J.P. Sartre :

« JESSICA - *Hugo! Tu parles contre ton coeur. Je t'ai regardé pendant que tu discutais avec Hoederer: il t'a convaincu.*
HUGO - *Il ne m'a pas convaincu. Personne ne peut me convaincre qu'on doit mentir aux camarades. Mais s'il m'avait convaincu, ce serait une raison de plus pour le descendre parce que ça prouverait qu'il en convaincra d'autres.* »

R. Duval en propose le schéma suivant (partie en italique) qui ressemble vaguement à un pas de démonstration.



Et il note :
- que la conclusion affirme autre chose que ce qui est dit dans l'énoncé tiers. Elle constitue un apport informatif déplacé (et non détaché) de l'énoncé tiers.
- que les relations entre prémisse et énoncé tiers portent sur des termes de l'énoncé tiers.
- que l'énoncé tiers n'a aucun « statut » préalablement fixé.

Des connecteurs sont néanmoins utilisés pour exprimer le raisonnement. Leur présence peut faire penser à un raisonnement déductif.

Ce n'est cependant qu'une apparence, superficielle.
Une autre particularité de l'argumentation est de fonctionner par accumulation d'arguments.
Dans une argumentation, les arguments s'ajoutent les uns aux autres, se renforcent mutuellement. Chacun, séparément, a un rapport direct avec la thèse soutenue ou réfutée.
Aucun cependant n'emporte à lui seul une adhésion certaine.

En résumé (toujours d'après R.Duval), les différences entre argumentation et démonstration sont les suivantes.

	ARGUMENTATION	DÉMONSTRATION
OBJECTIF	Convaincre	Prouver
DÉMARCHE	Chaque pas de raisonnement est en relation avec la conclusion et s'ajoute aux autres. La continuité sémantique repose sur des rapprochements et des oppositions.	Chaque pas s'appuie sur un énoncé tiers qui a le statut de définition ou de théorème. La cohérence vient du modèle rhétorique qu'est le raisonnement déductif.
Le raisonnement doit être	pertinent	valide

L'argumentation et la démonstration, fut-elle seulement déductive, diffèrent.
C'est sûr...

Mais alors, dans les travaux de groupes en classe de mathématiques, l'élève qui croit détenir des bribes de la démonstration cherchée et tente d'en *convaincre* son camarade produit-il un discours *argumentatif* qui n'ait plus rien à voir avec un travail mathématique ?

Croire, convaincre ne sont-ils pas des ingrédients de l'argumentation ?

Il s'agit d'autre chose.

La démarche de recherche comporte des essais, vérifie sur des cas particuliers que la propriété à démontrer n'est pas contredite par tel ou tel exemple qui, peut-être, aurait pu fournir un contre-exemple. On tâtonne.

Elle opère aussi des comparaisons avec d'autres problèmes.

Mais s'il est vrai que « comparaison n'est pas raison », l'échange porte sur des constats et sur de possibles pas utiles à la démonstration à trouver.

Le but reste la validité de la démonstration cherchée, non la persuasion de l'interlocuteur (sauf dévoiement).

Il n'y a pas matière à douter de soi-même et encore moins à troubler inutilement l'esprit de nos élèves.

Interdisciplinarité

On devine quel bénéfice peut être tiré d'une approche interdisciplinaire des ressemblances-oppositions entre démonstration et argumentation, ne serait-ce que pour éclairer ce qui ne serait que curiosité.

En voici une illustration qui sort du cadre restrictif de la démonstration déductive et des seuls exemples empruntés aux apprentissages du collège.

Il s'agit d'une coordination interdisciplinaire en classe de première effectuée sur le thème : Syllogisme et raisonnement par récurrence[1].

La notion de syllogisme a été introduite en premier lieu en classe de Français, le professeur de mathématiques étant présent.

La tâche confiée aux élèves, sur la base d'un questionnaire, a consisté à relever définitions et exemples dans des dictionnaires et encyclopédies aux entrées Aristote et syllogisme.

La schématisation du célèbre syllogisme « Socrate est mortel » a servi de modèle pour d'autres proposés par des élèves, puis pour des triplets de propositions extraits de *La logique sans peine* de Lewis Caroll...

Le travail, en classe de Français, s'est alors prolongé par l'étude d'une scène de *Rhinocéros* de Ionesco (pour en analyser le ressort comique) puis du texte *De l'esclavage des nègres* de Montesquieu.

Conjointement, le professeur de mathématiques a introduit sur un exemple le raisonnement par récurrence, puis distribué le texte d'Henri Poincaré extrait de *La science et l'hypothèse* ainsi rédigé:

« *Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence, c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.*

...Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes. »

Sans prétendre au miracle, il semble que, non seulement le raisonnement par récurrence ait ainsi été vite et bien maîtrisé mais que, d'autre part, l'étude des textes ait gagné en intérêt.

[1] Expérimentation CNP en 1992-1993 faite au lycée Victor Louis à Talence avec Catherine Pesquer professeur de lettres.

En conclusion le langage, outil commun de pensée, est interdisciplinaire. Son maniement correct dans la diversité des contextes et des présupposés n'a cependant rien d'évident.

BIBLIOGRAPHIE

I

Document élaboré par le groupe « Langage et Mathématiques » CNP-INRP.

Ce document est destiné aux équipes désireuses d'entreprendre un travail interdisciplinaire mathématiques-français et à la formation des enseignants des deux disciplines.

* Français et Mathématiques (lecture/écriture; démonstration/ argumentation). Orientations bibliographiques. Groupe « Langage et mathématiques » CNP-INRP déc. 1992. Éditeur : CRDP de Marseille.

II

*Français-Mathématiques. Cahiers pédagogiques n° 316 septembre 1993. Éditeur : CRAP Paris.

* R. DUVAL. Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive. Petit X n° 31 1992. Éditeur : IREM de Grenoble.

* R. DUVAL. Sémiosis et pensée humaine. 1995. Éditeur : Peter Lang.

* Ch. PÉRELMAN et L. OLBRECHTS-TYTÉCA. Traité de l'argumentation. 1988. Éditeur : Université de Bruxelles.

* Ch. PLANTIN. Argumenter. De la langue de l'argumentation au discours argumenté (dossier pédagogique de 30 fiches). 1989. Éditeur : CNDP Paris.

* Ch. PLANTIN. Essais sur l'argumentation. déc. 1990. Éditeur : KIME.

III

* P.LEGRAND. Les maths en collège et en lycée. Éditeur : Hachette 1997.

* H.POINCARÉ. La science et l'hypothèse. Éditeur : Flammarion 1943.

ANNEXE : Textes distribués

En Français (extrait de *Rhinocéros*).

Le Logicien, *au vieux Monsieur*:

Voici donc un syllogisme exemplaire. Le chat a quatre pattes. Isidore et Fricot ont chacun quatre pattes. Donc Isidore et Fricot sont chats.

Le vieux Monsieur, *au Logicien*:

Mon chien aussi a quatre pattes.

Le Logicien, *au vieux Monsieur*:

Alors, c'est un chat.

Le vieux Monsieur, *au Logicien*:

Donc, logiquement, mon chien serait un chat.

Le Logicien, *au vieux Monsieur*:

Logiquement, oui. Mais le contraire est aussi vrai.

...

Le Logicien, *au vieux Monsieur*:

Autre syllogisme: Tous les chats sont mortels.

Socrate est mortel. Donc Socrate est un chat.

Le vieux Monsieur, *au Logicien*:

Et il a quatre pattes. C'est vrai, j'ai un chat qui s'appelle Socrate.

En mathématiques (extrait de *La science et l'hypothèse*).

Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence, c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.

Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade.

Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.

Le théorème est vrai du nombre 1.

Or, s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.

Donc, il est vrai de 2.

Or, s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.

Donc, il est vrai de 3, et ainsi de suite.

On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant.

De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique.

Si le théorème est vrai de $n - 1$, il l'est de n.

On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures.

Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes.