Février - Mars 1998
Supplément au
Bulletin n°414

de la maternelle ...

BAC MATHÉMATIQUES HORIZON 2000

Contribution du groupe de travail de l'A.P.M.E.P. "Prospective Bac"

...à l'université

ASSOCIATION
des
PROFESSEURS
de
MATHÉMATIQUES
de
L'ENSEIGNEMENT
PUBLIC

BAC MATHÉMATIQUES
HORIZON 2000

Contribution du groupe
de travail de l'A.P.M.E.P.
"Prospective Bac"

Décembre 1997

SOMMAIRE

Supplément au n°414 : Février-Mars 1998

Directeur de publication : Jean-Pierre RICHETON / Impression : IGR 201 rue Marcel Meyrieux-Lyon
Mise en page : Atelier Jean Eugène / Montage : Atelier M.Michaud & Fils / Façonnage Alain
Numéro d'Enregistrement à la Commission Paritaire : 52819

Préface

Jean-Pierre RICHETON
membre du groupe "Prospective-Bac"
Président de l'APMEP

En caricaturant à peine, on peut recenser trois grandes manière de traiter les erreurs, leur statut étant étroitement lié à notre façon d'enseigner :

- l'erreur considérée comme un manque de connaissances : l'élève doit apprendre et doit pouvoir appliquer... sinon le professeur peut ré-expliquer...,
- le principe des "*petites marches*" : s'il y a trop d'erreurs, le professeur propose à ses élèves des "marches moins hautes" en leur donnant davantage d'étapes intermédiaires... Avec pour avantages que ceux-ci pourront mieux se repérer dans leurs difficultés et que le professeur pourra mieux repérer les "dysfonctionnements". Mais avec pour limites dans leurs effets que les élèves auront beau maîtriser des "micro compétences", cela ne les empêchera pas d'éprouver des difficultés à les mettre en œuvre simultanément. Sans compter qu'à découper leur travail en tâches de plus en plus simples, les élèves risquent d'en perdre le **sens**,
- enfin, l'erreur considérée comme point d'appui et qui n'est donc plus à éviter à tout prix... : les "erreurs" , ou réponses inadéquates, constituent pour l'élève un obstacle où ses connaissances ne fonctionnent plus et le placent devant la nécessité d'intégrer de nouvelles connaissances. Ce dernier cas va de pair avec *la perspective constructiviste de l'enseignement par activités*, dans le but de mettre en place une notion nouvelle par exemple.

Ce n'est pas un scoop si je vous dis que nous sommes nombreux à l'APMEP à accorder notre préférence à cette dernière façon d'enseigner, persuadés qu'ainsi nous pouvons mieux participer à une formation de qualité pour tous nos élèves.

Et il est alors facile de comprendre pourquoi nous sommes si peu satisfaits des libellés actuels des programmes et des sujets du bac. En effet, nous sommes nombreux également à penser que le décalage entre les intentions majeures des programmes, intentions que nous approuvons tout à fait à l'APMEP, et la rédaction effective des contenus, et surtout des commentaires, ainsi que des sujets de baccalauréat ont fini par pervertir l'enseignement des mathématiques au lycée. Il n'est donc pas surprenant qu'une de mes premières décisions, en tant que Président de l'APMEP, ait été de réactiver un groupe baptisé "Prospective Bac" avec pour tâche de proposer des énoncés de bac. renouvelés dans l'espoir de voir effectivement évoluer les pratiques dans le sens souhaité par les objectifs, communs à toutes les séries, comme :

> « *Entraîner les élèves à l'**activité scientifique** et promouvoir l'**acquisition** de méthodes : la classe de mathématiques est d'abord un lieu de **découverte, d'exploitation de situations**, de **réflexion** et de débat sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de **synthèse** dégageant clairement **quelques** idées et méthodes essentielles et mettant en valeur leur portée ...* »,
>
> donc entraîner les élèves à « *choisir et utiliser les outils pertinents parmi...* » avec pour objectif de *développer leurs capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique ...*

Car il faut bien reconnaître que des commentaires comme : «... *des indications doivent être données sur la méthode à suivre.* » ou encore « ... *toutes les indications utiles doivent être fournies.* » incitent bien souvent les professeurs à proposer aux élèves des exercices répétitifs sur des thèmes bien ciblés à l'avance... confortés en cela par les sujets du bac qui *guident les élèves à l'excès* selon nous. S'il est tout à fait souhaitable que les élèves bénéficient d'indications leur permettant de ne pas rester "*bloqués*" ou leur permettant de pallier une erreur éventuelle aux répercussions disproportionnées un jour d'examen, comment en effet ne pas regretter la formulation de certains sujets du bac., qui contiennent la réponse à certaines questions ainsi que **la** (?) méthode à utiliser... ce qui me fait souvent dire que de tels énoncés d'examens peuvent être ressentis par nos élèves comme une "*insulte à leur intelligence*"... sans compter qu'avec ce type de problèmes, il n'est pas rare de les voir "*bricoler*" de vagues raisonnements en paraphrasant des énoncés où figure le résultat cherché... ce qui en fait souvent aussi des "*escrocs malgré eux*" !

D'où le poids écrasant du bac, parce qu'étroitement liés au style actuel de notre enseignement et réciproquement ... et sans doute pourquoi "on" reproche également à nos élèves de manquer d'autonomie, d'être incapables le plus souvent de résoudre un problème s'il n'est pas balisé de *a* à *z* ...

Il nous est donc apparu nécessaire, aujourd'hui plus que jamais, d'amorcer un véritable virage en proposant entre autres, des exercices de type "recherche". Ceci n'est soutenable qu'**à condition d'évaluer les candidats sur leurs démarches**, qu'elles soient fructueuses ou non, pourvu qu'elles soient explicitées quant à leur intention Chacun sait que nos élèves sont capables d'efforts et ont davantage de volonté que l'on veut bien leur accorder. Cependant ces qualités ne sont pas toujours visibles avec notre système actuel d'évaluation. Une copie vide ne signifie pas nécessairement que l'élève n'a rien fait... il a peut-être beaucoup cherché et parfois de façon très sensée mais n'a rien jugé de valide, à ses yeux, à rédiger. D'ou l'intérêt précisément de les entraîner à laisser des traces de leur recherche... D'où l'importance aussi d'encourager un élève en valorisant ses démarches, surtout s'il ne réussit pas à résoudre complètement un problème. Le sentiment d'échec est souvent écrasant pour qui n'est jamais en situation de réussite. Ainsi, les élèves ayant pris l'habitude, voire le plaisir, de *sécher* et d'exposer les diverses étapes de leur démarche, un autre intérêt sera de les libérer de *la peur de la copie vide.*

Les protéger au maximum de tout risque d'erreur nous semble en effet les amener à "*reculer pour mieux échouer*". **Il vaut mieux leurs apprendre à affronter puis à franchir les obstacles, en leur inculquant le désir et la volonté de les franchir tout en leur donnant la capacité de le faire**, en développant leur aptitude à s'auto-évaluer et à contrôler la pertinence de leur démarche. Il faut parvenir à ce que le futur citoyen n'accepte, ni de lui-même, ni d'autrui, l'à-peu-près, l'évasif, l'affirmation péremptoire...

... et de façon plus immédiate parvenir à supprimer le "réflexe" d'un encore trop grand nombre d'élèves, qui après une lecture rapide d'énoncé d'un exercice, se réfugient derrière un : « *Je ne sais pas faire* ... » comme si le fait de n'en avoir jamais fait du même type que celui proposé devenait une condition suffisante pour ne pas tenter de le résoudre ! Alors de là à ériger la "répétitivité" en condition nécessaire à la "réussite" d'une question posée, il n'y a qu'un pas trop facilement franchi hélas par bon nombre d'entre-nous ...

La présence de tels exercices de "recherche" au bac. nous semble donc la condition incontournable pour que les pratiques évoluent dans le sens souhaité par les objectifs des programmes et réduire ainsi le décalage dont il a été question précédemment...

Il nous semble également important que nos élèves aient une autre image des maths que celle d'une matière où « *on applique* » et que l'on cesse de dénaturer les maths aux yeux des élèves et notamment des élèves catalogués « non scientifiques » ... mais encore faut-il nous donner des instructions et commentaires de programme qui le suggèrent davantage ainsi que le temps d'enseigner autrement.

Et est-ce trop demander que **d'exiger d'avoir du temps** à consacrer à nos élèves pour leur permettre d'exercer leur imagination, pour les amener à développer leur esprit d'initiative, pour leur faire découvrir la beauté d'un théorème, d'une démonstration...

Je sais, on va encore nous taxer de rêver à l'APMEP... Mais est-ce vraiment rêver que de demander d'avoir les moyens de pouvoir enfin mettre en pratique **les huit moments de l'activité mathématique**, prônés par les programmes, à savoir :

- *formuler un problème,*
- *conjecturer un résultat,*
- *expérimenter sur des exemples,*
- *bâtir une démonstration,*
- *mettre en œuvre des outils théoriques,*
- *mettre en forme une solution,*
- *contrôler les résultats obtenus,*
- *évaluer leur pertinence au regard du problème posé,*

et de viser à ce que nos élèves soient capables de réinvestir cette démarche dans d'autres situations, qu'elles soient mathématiques ou non, et par là de se construire en tant que citoyen... ?

Mais quels que soient les aménagements ou modifications qui, nous l'espérons, seront apportées dans les intentions majeures ou la conception des programmes et leur répercussions souhaitées au niveau des pratiques, il faudra que la "***règle***" **soit claire : nous devrons y préparer nos élèves et nous y préparer nous-mêmes** afin d'assurer au mieux notre mission fondamentale qui est la formation de **tous** nos élèves et ce document n'a d'autre but que d'y contribuer déjà en souhaitant qu'il soit enrichi par les réactions de ceux qui le liront.

Jean-Pierre RICHETON
Président de l'APMEP

Contribution du groupe de travail de l'A.P.M.E.P. "Prospective Bac"

En guise d'introduction

Chacun s'accorde à reconnaître et déplorer que l'épreuve de mathématiques aux différents baccalauréats ne corresponde plus aux vœux et aux objectifs des enseignants de la classe terminale. En même temps, il est fait reproche que les élèves dans les classes ultérieures ne sachent plus démontrer, les programmes préconisant d'admettre, le plus souvent, les théorèmes. Trop souvent réduite à une suite de questions guidant l'élève pas à pas vers un résultat juste (ou erroné), réduisant son activité principale à l'utilisation d'algorithmes, infléchissant en rétroaction bien souvent le contenu et les méthodes développées au cours de la dernière année de lycée, l'épreuve ne mesure que rarement les démarches et les capacités considérées majeures pour une formation scientifique en général, mathématique en particulier : esprit critique, imagination créatrice, modélisation, réinvestissement, etc. De plus la probabilité de la réussite, obtenue en se limitant à l'apprentissage de standards définis par les annales, réduit l'enjeu de l'épreuve et démobilise les compétences supérieures.

Il semble possible de pallier ces différentes carences par quelques aménagements progressifs de l'épreuve, sans la transformer en "Olympiades", par exemple en :

* diminuant le poids du problème et augmentant le nombre d'exercices,
* variant les thèmes de ces exercices afin d'évaluer une plus grande étendue des programmes de première et terminale,
* posant une question de cours nécessitant une démonstration et conduisant élèves et professeurs à restituer à celle-ci une place plus importante,
* prenant en compte autant les démarches que les résultats, même lorsque ceux-ci ne sont pas complets,
* laissant plus d'initiative à l'élève dans des exercices plus ouverts où la créativité y trouverait sa place...

Aussi, l'A.P.M.E.P., à la suite des premiers travaux du groupe "Prospective Bac" dont elle donne ici quelques éléments de réflexion, vous propose à leur suite trois sujets prototypiques qu'elle vous demande d'expérimenter et de juger. Il est bien évident que de tels changements, s'ils vous semblent novateurs, ne peuvent être institutionnalisés qu'après un terme de concertation, de débats mais aussi de préparation des élèves à d'autres pratiques des mathématiques.

Sauf indication contraire, les textes présentés dans ce document ont pour auteur Régis GRAS

ESSAI D'ANALYSE DES CONTRAINTES PESANT SUR L'ENVIRONNEMENT DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Cette analyse est une tentative de diagnostic. Diagnostic sur des causes profondes et entremêlées qui pourraient être à l'origine des inquiétudes énoncées par des enseignants de classes post-bac à l'égard de l'enseignement pratiqué dans le secondaire et partant de difficultés qu'ils rencontrent pour développer leur propre enseignement de mathématiques. A mon sens, deux écueils improductifs devraient être évités par ces enseignants :

* d'une part, s'en tenir à se lamenter sur les incompétences et les lacunes manifestées par les élèves par rapport aux attendus lies à des traditions et une pratique routinière, les lamentations se renforçant du fait naturel de la représentation nostalgique du passé (ceci étant dit sans esprit polémique) ;
* d'autre part, mesurer les attendus à l'aune des profils d'étudiants à leur charge, comme si tout élève du deuxième cycle du secondaire, tout bachelier se destinait nécessairement à une classe type sup. ou un DEUG math.

L'analyse de l'état actuel des connaissances et des compétences des élèves qui sortent de l'enseignement secondaire, la confrontation avec les objectifs attendus doivent se faire au regard des besoins de scientificité de la société présente (les mathématiques du citoyen), au regard des nombreuses variantes des débouchés professionnels des élèves (tous ne seront pas ingénieurs ni chercheurs, même s'ils suivent un enseignement scientifique), aux contraintes institutionnelles et, plus généralement, aux différentes composantes de l'environnement des élèves sortant du secondaire. En bref, si cette analyse ne doit pas ignorer les attentes spécifiques de l'enseignant des classes préparatoires ou de l'université, elle doit prendre en compte des phénomènes plus larges et moins corporatistes.

De façon objective, en évitant les prises de position personnelles, tentons cette analyse des composantes de l'environnement à grands traits :

* **l'environnement pédagogique** est subordonné à la psychologie de l'apprentissage, elle-même très orientée, qu'on le veuille ou non, par le constructivisme. Ceci devrait conduire l'enseignant, didacticien ou non, à faire participer davantage l'élève à ses acquisitions à travers des travaux dirigés ou des travaux pratiques au bénéfice attendu d'une meilleure significa-

tion des savoirs enseignés, d'une plus grande autonomie et d'une meilleure durabilité de ses apprentissages. Il est bien connu que ceci nécessite dans le temps d'enseignement, des durées plus longues, une place accrue pour des "activités" et une plus grande individualisation dans l'intervention des maîtres. Que l'on ne se méprenne pas, l'individualisation vise à respecter aussi bien les rythmes d'acquisition et les capacités des plus "forts" comme ceux des plus "faibles". Cependant, l'effet d'une connaissance mieux construite n'est nullement mesuré actuellement par les examens de fin de cycle, le baccalauréat en particulier. Donc tout jugement et tout recrutement sur cette base risquent d'être biaisés par l'absence de fidélité de l'instrument de mesure qui, de ce fait, ne peut garantir de sélectionner les élèves les plus capables de réussir leur intégration dans les cycles supérieurs.

Cette psychologie de l'apprentissage n'est d'ailleurs que la version de choix épistémologique et cognitif dérivés de la psychologie contemporaine et occidentale qui met l'accent sur l'individu et sur le respect de son libre arbitre, en limitant les contraintes qui pèsent sur lui. Notons à ce sujet un symptôme significatif : la disparition ou la raréfaction, au sein de la formation scolaire, des activités impositives comme la dictée, l'apprentissage de la grammaire et, plus généralement, le retrait de l'écrit en faveur de l'oral. Que les mathématiques, discipline rigoureuse, fassent les frais de ce "libéralisme" n'a plus rien d'étonnant;

* **l'environnement social** à la fin de ce siècle n'est en aucune façon comparable à celui qui prévalait il y a 30 ans. D'une part, les flux d'élèves à la sortie du premier cycle du secondaire n'ont cessé de croître et conduisent à une hétérogénéité dont la gestion se complique du respect des contraintes du point précèdent. D'autre part, l'image des mathématiques, après l'échec des mathématiques modernes, est renforcée par un certain matraquage des médias, très souvent à l'affût démagogique, renforçant les effets de mode. Cette image, représentation spontanée des adultes formés en une génération troublée par la reforme des mathématiques, ne jouit pas toujours d'un prestige à la hauteur des efforts qui sont faits par les corps des chercheurs et des enseignants. En effet, dans une société de plus en plus utilitariste et hédoniste, où la connaissance (l'information?) passe avant tout par l'image, les mathématiques sont considérées trop souvent comme étant ésotériques et sans utilité socio-professionnelle ("à quoi servent-elles ?", "dans ma vie, diront certains, je ne réutilise rien de ce que j'ai appris !")[1]. Or, dans les faits,

[1] Des enquêtes récentes ont montré cependant que les mathématiques étaient la discipline préférée de la majorité des élèves et celle en laquelle les parents d'élèves accordaient le plus de confiance.

cette discipline, d'applicabilité incertaine, est dotée d'un pouvoir sélectif excessif par le système scolaire qui lui échappe en grande partie. Ce pouvoir se présente comme un obstacle à la satisfaction d'une attente sociale de "diplômite", dont chacun reconnaît son côté incontournable en raison de la corrélation entre chômage et absence de diplôme;

* **l'environnement scientifique** nécessite, reconnaissons-le, une plus grande compréhension, ou tout du moins une plus grande maîtrise des phénomènes techniques développés à une vitesse vertigineuse depuis le début du siècle. Cette compréhension passe par des processus qui ne sont pas qu'algorithmiques comme la recherche d'informations dans une base de données. En même temps, la connaissance scientifique, qui est de nos jours quantitative ou n'est pas, ne se développe qu'au prix de meilleurs modèles dont la plupart sont d'ordre mathématique (en économie, en biologie, en agronomie, ...). Tout ceci nécessite la prise en compte de nouveaux apprentissages dans les programmes d'enseignement (comparer d'ailleurs les contenus d'il y a 50 ans et les contenus actuels) et donc des bouleversements quelquefois sacrificiels de contenus anciens. Ainsi une crispation de l'enseignant sur la démonstration seule, sur la démarche déductive, bien que composante importante de l'activité mathématique, risque d'oblitérer toute forme de raisonnement autre que la déduction (preuve par l'exhaustion ou la monstration) ainsi que certains autres apprentissages, eux-mêmes loin d'être inessentiels dans cette société placée à l'aube du XXI^{e} siècle ;

* **l'environnement économique** place nos systèmes d'enseignement sous des contraintes difficilement intégrables. L'explosion démographique des cohortes de lycéens, la gestion de leur flux ont conduit au développement de l'auxiliariat et au recrutement quelquefois improvisé d'enseignants mal formés à leur métier. Les classes terminales sont généralement chargées et, de toute façon, ne se prêtent pas à la satisfaction des pressions exercées par les composantes examinées ici de l'environnement des élèves. De plus cet environnement se renforce d'un comportement de plus en plus consumériste de notre société, institution comprise, société où le droit est toujours revendiqué avant le respect du devoir : productivité à court terme, refus des intérêts différés, rentabilité des investissements en termes arithmétiques, satisfaction de lobbies économiques pour la répartition du temps scolaire ;

* **l'environnement international** conduit à des comparaisons entre les curricula : programmes, temps d'enseignement, formation, supports pédagogiques, taux de réussite à des examens nationaux ou à des épreuves internationales, ..., comparaisons biaisées du fait que les variables ne sont pas contrôlées et que les cultures et les contextes sont différents. Bien souvent

des décisions sont prises dans la précipitation pour satisfaire un désir de nouveauté et expérimenter un nouveau remède (placebo?), en isolant un effet et en n'agissant que sur la variable qui semble la plus corrélée à cet effet. C'est le cas actuellement, après la "furia" des années 80, de la gadgétisation du multimédia et d'Internet.

Ce n'est donc pas à la faveur d'exhortations ni même de vociférations que l'enseignement des mathématiques pourra changer. Il sera bien entendu difficile voire impossible de satisfaire toutes les contraintes, de natures diverses et d'effets conjugués comme on vient de le voir, contraintes qui pèsent sur le système éducatif et particulièrement sur les mathématiques. D'autant que quelquefois les pressions agissent de façon contradictoire. Mais un diagnostic doit permettre que toute modification se fasse en connaissance de cause: que prend-on en compte ? par rapport à quelle contrainte incontournable ? que décide-t-on de laisser en attente ? etc. Il faudra en convaincre institution, médias, parents, élèves, enseignants de disciplines différentes, mais aussi de la même discipline mathématique, ce qui n'est certes pas le plus facile ! Les arguments sont à rechercher, avec de la bonne volonté et une dispense de préjugés, du côté d'une meilleure définition de finalités et d'objectifs, eu égard au contexte actuel, d'une formation professionnelle plus adaptée des enseignants et d'une meilleure spécification en fonction des orientations et des variétés professionnelles des élèves à la clé. Mais ceci serait insuffisant sans la recherche d'une opérationalisation rationnellement définie en écho des propos précédents. La crédibilité de toute réforme, qui ne soit pas que technologique, en dépend.

ENSEIGNEMENT et EVALUATION QUESTIONS-REPONSES [2]

Suite à différentes interrogations au sujet du rôle de l'enseignement des mathématiques par rapport aux attentes sociales, professionnelles, culturelles et disciplinaires, nous nous sommes livrés au jeu questions-réponses ci-dessous et avons proposé quelques pistes. Celles-ci pourraient conduire à quelques réformes portant plus particulièrement sur le baccalauréat. A ce sujet, il semble que l'on confonde trop souvent élévation du niveau culturel de notre pays et accroissement de la fréquence du nombre annuel de bacheliers. Or, nous l'avons évoqué, la standardisation des épreuves, l'algorithmisation des démarches en jeu, la probabilité de la réussite démobilisent la volonté, minorent les compétences en acte des élèves, tout en s'accompagnant d'une obsolescence progressive des savoirs enseignés.

[2] La rédaction de cette partie "Questions-réponses" a bénéficié de l'aide et des conseils d'Annie Larher.

Question 1 : *Les mathématiques sont-elles seulement une discipline de service ? Pourrait-on se contenter, dans une formation générale, de faire enseigner par chaque discipline les mathématiques dont elle a besoin ?*

Apports spécifiques de l'enseignement mathématique par rapport aux autres disciplines

L'enseignement des mathématiques vise à faire atteindre par les élèves, de façon plus spécifique que les autres disciplines, les objectifs suivants :

* effectuer un calcul en utilisant un algorithme formel, donc assez général pour être utilisé dans différentes circonstances, c'est-à-dire instanciable de façon quelconque, contrairement aux situations des autres sciences où les grandeurs sont spécifiées.
⇨ *mathématique science formelle* ;

* optimiser une démarche, un résultat à partir d'une famille de démarches possibles, de résultats plausibles, en utilisant des critères objectifs (par exemple en utilisant la fonction max-min ou le maximum de vraisemblance ou le minimum de risque).
⇨ *mathématique science économique ;*

* représenter une situation par un graphique, un diagramme qui fassent apparaître les propriétés relationnelles (par exemple, entre 2 ou 3 variables qualitatives), topologiques (un plan de circulation), algébriques (entre variables réelles, par ex.) ,..., des objets de la réalité physique ou des objets mathématiques
⇨ *mathématique science descriptive* ;

* modéliser et formaliser une situation-problème en fonction de contraintes imposées ou des degrés de liberté admis dans celle-ci
⇨ *mathématique science des modèles* ;

* différencier ce qui est général de ce qui est particulier (mise en garde à l'égard de l'induction ou de l'analogie hâtives). De plus, exprimer ce qui est général dans une classe de situations voisines, par l'explicitation des invariants.
⇨ *mathématique science discriminante* ;

* structurer un ensemble de données selon des méthodes géométriques ou combinatoires pour l'analyser, pour permettre d'émettre des hypothèses, de proposer des inférences, tout en en contrôlant le degré de confiance
⇨ *mathématique science structurante* ;

* disposer de méthodes sur la base de la logique propositionnelle (connecteurs, quantificateurs) qui permettent de conduire à un raisonnement indépendant de la sémantique pouvant être irréfutable dans un champ déterminé et sur la base d'hypothèses admises, qui permettent de critiquer et réfuter des arguments d'autorité.
⇨ *mathématique science rationnelle et méthodologique*;

* apprécier la beauté, l'élégance d'une figure, d'une méthode, d'une preuve.
⇨ *mathématique science esthétique.*

De façon plus générale, dans leur formation scientifique et sociale, l'enseignement des mathématiques contribue fortement à munir les élèves de modes de pensée et d'outils universels et transférables. C'est donc l'ensemble et la conjugaison des propriétés ci-dessus qui font des mathématiques une science à part entière et non commune.

Question 2 : *A quoi sert l'épreuve de mathématiques dans un examen de fin d'études comme le baccalauréat ? Est-elle nécessaire ? Si oui à quoi ?*

Fonctions de l'évaluation

Dans les faits, on considère généralement que l'épreuve de mathématiques au baccalauréat doit remplir (actuellement plus ou moins bien) une double fonction :

* **sommative** : évaluer par un bilan les acquisitions de l'élève au cours de ses études dans l'enseignement secondaire et dans la filière choisie, à la fois à travers ses connaissances et ses démarches ;

* **prédictive ou pronostique** : Évaluer les capacités de l'élève à poursuivre des études ultérieures qui sont le plus souvent visées par le choix de la filière donc contribuer à son orientation de façon positive.

Ceci signifie que cette dernière fonction ne peut être véritablement bien assumée que si les résultats de l'examen sont couplés à ceux d'un contrôle continu, l'épreuve d'une demi-journée limitant l'étendue de la mesure des capacités dans de bonnes conditions cognitives et psychologiques entre autres. De plus, les variantes de formation après bac sont telles (courtes ou longues par exemple) que la spécification des capacités devrait les prendre en compte, sans s'illusionner sur la portée du pronostic qui ne peut intégrer les motivations et les contraintes sociales et économiques.

De plus, il est indéniable que la forme et les contenus de l'évaluation externe, baccalauréat par exemple, ont une influence capitale sur la formation scolaire en amont. D'une part, elle fournit une banque de problèmes, considérés prototypiques, à l'élève pour ses bilans personnels et au professeur pour sa préparation à l'examen. D'autre part, et de ce fait, elle fixe plus ou moins implicitement, mais surtout insidieusement, les objectifs à atteindre et les attitudes à adopter face à l'épreuve terminale d'un cycle. S'il est hors de question de culpabiliser les maîtres qui du point de vue professionnel, doivent honorer un contrat institutionnel et social, on observe en conséquence la sclérose progressive et inéluctable de l'activité de classe en même temps que l'obsolescence du savoir transmis.

Question 3 : *Si l'on pense savoir assez bien évaluer l'acquisition des connaissances, qu'en est-il de l'évaluation des démarches que l'enseignement des mathématiques est censé faire acquérir ? Sont-elles indépendantes des filières suivies (bilan) et visées (pronostic) ?*

Remarques au sujet des démarches

Certes les acquisitions de connaissances peuvent varier d'une filière à une autre, mais des démarches communes sont partagées et évaluables entre ces différentes filières ; citons à titre d'exemples :

* communiquer oralement ou par écrit, de façon claire, soignée, éventuellement précise et objective un résultat ou une représentation (graphique, tableau, plan,...) ;

* conduire un raisonnement de 3 à 5 pas de façon rigoureuse sans paralogisme (erreur de bonne foi), ni sophisme (erreur de mauvaise foi), donc en particulier, sans "cercle vicieux", aussi bien dans un cadre géométrique, que dans des cadres arithmétique ou algébrique ;

* adopter une attitude critique face à un résultat, par exemple numérique (vraisemblance : ordre de grandeur ; pertinence : précision , nombre de décimales ; adéquation : conformité à la situation, ...), mais aussi bien face à un texte argumentatif (élaboration d'un contre-exemple) ;

* fournir un exemple iconique ou numérique pour une situation générale ;

* émettre des hypothèses de plausibilité en faisant le choix de ce qui semble le plus vraisemblable;

* faire choix d'une méthode ou d'une stratégie ayant les meilleures chances de déboucher sur une solution. De façon plus générale, plus particulièrement dans les moments d'expression libre, hors contexte de contrôle, se servir des espaces de liberté, laissés dans ou hors du temps d'enseignement, pour exercer sa créativité, voire sa fantaisie inventive.

Si l'on considère ces démarches comme fondamentales, est-il alors encore possible de considérer que l'épreuve de baccalauréat actuelle est adaptée à leur évaluation ?

Question 4 : *Existe-t-il alors des démarches qui seraient plus spécifiques de telle ou telle orientation générale ?*

Quelques exemples de démarches à valeur prédictive

Orientation (plutôt) technique	**Orientation (plutôt) sciences humaines (dont spécialité)**	**Orientation (plutôt) scientifique (dont spécialité)**
• mathématiser une situation concrète • estimer, d'une part à vue, certaines dimensions d'un objet présent ou non, d'autre part, un ordre de grandeur et relativiser la précision d'un résultat • conduire un calcul long de façon précise et sûre • représenter avec soin une configuration géométrique, même à 3 dimensions ou un graphique de fonction, • conduire un court raisonnement déductif, • consulter une documentation, en particulier sous forme informatisée, • dans un ensemble de données, définir des critères discriminants	• identifier un modèle mathématique adéquat à représenter une situation concrète simple, • critiquer un résultat obtenu par rapport à la situation proposée, • analyser et composer un texte en respectant les règles de la logique, • conduire un court raisonnement déductif, • développer et critiquer une argumentation, • organiser et représenter des données, en dégager les traits principaux, • comprendre et conduire un algorithme, • consulter une documentation , en particulier sous forme informatisée.	outre certaines des capacités en vis-à-vis : • modéliser une situation en identifiant concepts et relations en jeu, en choisissant les paramètres, • conduire un raisonnement déductif nécessitant plusieurs pas, • conduire un court raisonnement par l'absurde ou par récurrence, • fournir un contre-exemple à un résultat plausible, • définir un algorithme en termes d'opérations élémentaires, • consulter une documentation, en particulier sous forme informatisée, • structurer un ensemble de données à l'aide de critères discriminants préalablement établis.

Question 5 : *Alors, comment intégrer ce qui précède dans une épreuve de fin d'études ?*

Quelques points de méthodes pour construire une épreuve d'examen et quelques types d'épreuves

* en filières scientifiques, restituer une démonstration faite en cours ou construire ou analyser une nouvelle démonstration de longueur et de complexité "raisonnables",

* dans toute filière, à travers un problème court,

- modéliser ou à défaut mathématiser une situation plus ou moins complexe en identifiant et dénommant les variables, en formalisant la situation,
- résoudre le problème mathématique associé (calculs non inextricables, démonstration simple,...)
- revenir de façon critique à partir des résultats obtenus sur ceux attendus par la situation (pour établir l'épreuve, graduer, spécifier la difficulté et moduler le mode de traitement du problème en fonction des filières),

* en cas de construction d'une preuve mathématique, énoncer la propriété générale sous-jacente, si elle existe, et éventuellement conjecturer et évaluer sa réciproque,

* répondre à quelques questions posées sous forme de Q.C.M. et portant, par exemple, sur l'exploitation de données (tableau de nombres, graphiques,...), nécessitant observation, calculs, stratégie adaptée, conjecture et ... bon sens. Des Q.C.M. peuvent admettre plusieurs modalités exactes,

* une assertion générale étant donnée et déclarée ou vraie ou fausse,

- fournir un exemple (et/ou contre-exemple) confirmant (et/ou invalidant) l'assertion,
- conjecturer selon le cas une nouvelle propriété.

Celles-ci peuvent être choisies dans le champ de l'arithmétique.

Par rapport aux deux fonctions de l'épreuve indiquées plus haut, il serait bon que les concepteurs pondèrent leur impact en faisant choix d'un barème différentiel et de types d'épreuves associées de façon spécifique.

Ainsi, si l'on analyse les épreuves actuelles du baccalauréat, nous constatons que certains des critères ci-dessus sont loin d'être satisfaits :

- pas ou peu de démonstrations sont exigées de la part de l'élève. Le problème conduit, le plus souvent, à la résolution d'une suite préalablement décomposée en étapes courtes et se réduisant à des calculs algorithmiques : étude d'une fonction, de ses propriétés tangentielles, étude d'une intégrale, d'encadrements,....

- problème trop long aux questions trop dépendantes, généralement présenté dans le cadre de l'analyse, ne pouvant être de ce fait que limité dans sa fonction bilan ;
- exercices et problème le plus souvent présentés de façon fermée ne laissant pas place à l'imagination et à l'autonomie de l'élève ;
- vérification de l'apprentissage des connaissances de base absente qui aurait permis de valoriser le travail de l'élève en classe de première et terminale et de compenser la complexité liée à l'ouverture de certaines questions d'une épreuve nouvelle.

****

Question 6 : *Si l'on connaît assez bien le type de connaissances traditionnellement évaluées, y en a-t-il d'autres qui sembleraient à introduire, compte tenu de l'évolution du monde contemporain, des techniques et des enseignements scientifiques actuels ?*

Quelques exemples de notions ou groupes de notions dont on devrait analyser la connaissance ou la pratique

* représentation d'un ordre total ou partiel par un graphe,
* représentation matricielle d'une relation binaire,
* recherche de solutions à un problème linéaire par la programmation linéaire,
* critique de la logique d'un discours,
* émission de pari optimal ou à moindre risque à partir d'une situation aléatoire,
* structuration d'un ensemble de caractères ou de sujets par des partitions de plus en plus grossières (resp. fines) constituées sur un critère de ressemblance ou, éventuellement, de dissemblance,
* traitement d'un problème de cinématique en termes de position et de vitesse d'un mobile à un instant donné,
* utilisation de propriétés arithmétiques pour résoudre un problème concret,
* examen exhaustif d'un ensemble de possibles d'une situation ouverte.

Question 7 : *Comment pourrait-on, pour un contenu déterminé, selon des objectifs plus spécifiques d'une filière, suivant des niveaux d'approfondissement, faire varier l'activité et le type de tâche demandés à l'élève afin d'obtenir de lui une démarche relevant de l'objectif visé ?*

Exemple de variations d'exercices sur un thème à partir d'un objectif d'activité

A travers cet exemple, nous voulons montrer le caractère relatif des concepts en jeu au cours d'une phase d'évaluation, caractère qui en définirait trop souvent et univoquement l'activité de l'élève. Bien au contraire, l'exemple proposé ici montrera qu'il est possible de "métamorphoser" un noyau conceptuel initial de telle façon que soient mobilisées chez l'élève les composantes essentielles de son activité mathématique. Nous montrons ainsi qu'il est possible d'enrichir très sensiblement l'évaluation, de la placer à des niveaux et selon des types de difficulté différents et, par suite, de décliner un texte selon une palette variée susceptible de concerner d'autres filières du lycée que la seule filière scientifique. Nous utilisons comme guide la typologie d'activités mathématiques de Régis GRAS, typologie qui a servi de support à un autre type d'exemple proposable au collège.

Noyau conceptuel

Considérons l'application f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

Variante heuristique

Question : *Trouver tous les entiers positifs a et b tels que $a^b = b^a$.*

Pour résoudre cet exercice, l'élève peut "bricoler", tâtonner, dessiner, etc.

Variante traductive

Question : *Etudier les variations de l'application f. En donner une représentation graphique, et, en particulier, les asymptotes à la courbe.*

Tableau de variations et courbe sont deux représentations de la même application. Elles relèvent du même cadre algébrique mais utilisent des registres différents tant qu'il s'agit de la simple traduction. Mais, par exemple, une activité sur le graphique conduisant à des lectures inverses, à des mesurages conduirait à le considérer comme un cadre en lui-même, doté de ses propres concepts.

Variante classificatoire

Question : *a étant un nombre rationnel positif, déterminer suivant ses valeurs, les intervalles de la demi-droite réelle positive dans lesquels les inégalités suivantes sont satisfaites :* $x < e^{ax} < x^2$.

L'élève doit déterminer une classe d'intervalles respectant strictement un critère de choix. Les points de ces intervalles doivent satisfaire ce critère et être les seuls points de la demi-droite dans ce cas.

Variante technique

Question : *représenter très soigneusement sur du papier millimétré la courbe représentative de l'application f. Déterminer à partir de cette courbe les valeurs de x pour lesquelles :* $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2e}$

Cette question exige de l'élève un travail précis et soigné, ce qui n'était pas demandé précédemment. Ce sont ces qualités de présentation qui seront prises en compte dans l'appréciation, le tableau de variations n'étant pas exigé. Ici, l'activité de l'élève se situe principalement dans le cadre graphique.

Variante calculatoire

Question : *Soit* $x = 10^{10}$.

Calculer à 10^{-30} *près et à l'aide de développements limités la valeur de* $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

A priori la calculatrice ne permettant pas d'effectuer ce calcul, la nécessité d'utiliser les développements limités de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$ s'impose. La précision demandée exige que le choix des ordres d'arrêt des développements soit opportun.

Autre question : *Calculer* $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

Déterminer a tel que $\int_1^a \frac{\ln x}{x}\,dx = 1$.

La tâche de l'élève se ramène cette fois à l'intégration par parties de la fonction sur un intervalle défini. La deuxième partie de la question exige un petit traitement paramétrique.

Variante logique

Question : *Démontrer que, pour tout nombre réel x_1 tel que $1 < x_1 < e$, il existe un nombre réel unique x_2 tel que $x_1 \ln x_2 = x_2 \ln x_1$.*

L'élève doit apporter ici des arguments mathématiques, appuyés éventuellement sur l'intuition alimentée par la représentation graphique, intuition qui serait illégitime pour la validation attendue.

Variante critique

Question : *Est-il vrai qu'il existe au moins deux intervalles $I_1 \subseteq I_2$ emboîtés, de même centre et tels que pour a et b donnés sur* $[0, 1/e]$:

$$\forall x \in I_1,\ a < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e} \text{ et } \forall x \in I_2,\ b < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e}.$$

L'argument est à rechercher du côté de l'absence de symétrie de l'application.

Variante créative

Question : *Déterminer une fraction rationnelle de x qui s'adapterait au mieux selon vous à l'application f en possédant les mêmes asymptotes et la même valeur au point $x = e$.*

L'élève doit construire lui-même l'application demandée en cherchant à satisfaire successivement certains critères qui spécifient f.

Autre question : *Écrire une équation différentielle dont $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ serait solution.*

Variante réinvestissement

Question : Discussion entre deux adolescents...

« - 4% d'intérêts par an, ça ne fait pas grand'chose ! dit l'un.

- Mais si ! rétorque l'autre, si tu vis assez vieux, tu peux gagner plus qu'en récoltant chaque année ta mise de départ !
- .... (petit calcul) Là, tu exagères ! Tout le monde n'est pas Jeanne Calmant ! »

Retrouver le "petit calcul", puis sachant que l'on voudrait "gagner plus qu'en récoltant chaque année sa mise de départ" au bout de 50 ans, à partir de quel taux d'intérêt est-ce possible ?

(*problème proposé par Catherine Dufossé*)

Variante prédictive

Question : *Peut-on trouver d'autres rationnels a et b que 2 et 4 et tels que $a^b = b^a$.*

L'élève doit émettre une conjecture en partant de la résolution de l'équation $\frac{\ln x}{x} = \alpha$. Il n'est pas exigé qu'il conduise la solution jusqu'à la détermination générale des rationnels répondant à la question.

Variante heuristique et prédictive

Question : *Existe-t-il des points x où la valeur de la fonction* $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ *soit égale à celle de sa dérivée ? Ou bien soit égale à l'aire sous la courbe à partir de* $x = 1$ *?*

Ici également, il n'est pas nécessaire de conduire la solution jusqu'à la détermination des points x. Les arguments extraits des variations des fonctions en jeu peuvent suffire.

EXEMPLE N° 1
DE SUJET DE BACCALAURÉAT
TERMINALE S

Le soin et la précision apportés à la rédaction, à la présentation des résultats et à la validation des affirmations seront pris en compte dans la notation.

Connaissance de base

Démontrer que la composée de deux symétries centrales de centres respectifs O_1 et O_2 est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{O_1O_2}$.

Exercices

Les exercices suivant sont indépendants.

1

Une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie la condition suivante pour tout couple (x, x') tel que $x \neq x'$:

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\right| \leqslant K \text{ où } K \geqslant 0$$

Considérons le point M $(x,\ f(x))$ appartenant à la courbe représentative de f.

1° Déterminer la région du plan à laquelle appartiennent les points M' $(x'\ f(x'))$, vérifiant l'inégalité ci-dessus.

2° On considère l'application f vérifiant l'inégalité ci-dessus et telle que :

$$f(1) = 2 \text{ et } \forall\, x,\ |f'(x)| < 3.$$

Dessiner avec soin la région du plan dans laquelle se trouve la courbe représentative de f et justifier votre dessin.

******

2

Deux points A et A' ont pour abscisses respectives 1 et -1 sur un axe $(O, \vec{i})$. Un point M d'abscisse x, différente de 1, sur cet axe a pour image un point M' d'abscisse x' et défini par la relation :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = -4$$

1° Déterminer et représenter sur l'axe $(O, \vec{i})$. le ou les intervalles auxquels doit appartenir M pour que la longueur MM' ne dépasse pas 4.

2° Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x'$, ainsi que le ou les intervalles décrits par x' sur l'axe des ordonnées, lorsque MM' ne dépasse pas 4.

******

3

Deux nombres entiers positifs ou nuls n et p, p supposé connu, sont tels que n et n + p soient des carrés d'entiers, eux-mêmes positifs ou nuls.

1° Donner toutes les valeurs de n dans les cas suivants :

p = 13, p = 14, p= 20, p = 40, p = 48, p = 105.

2° Donner des conditions suffisantes que p doit satisfaire pour qu'il n'existe qu'une seule solution pour n. Justifier.

3° Quelle condition p doit-il satisfaire pour qu'il n'existe-t-il pas de solution pour n ? Pourquoi ?

******

4

Un certain jeu de hasard, qui fut présenté à la télévision, se joue avec un jeu ordinaire de 32 cartes qui combine donc les "hauteurs" (as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7) et les "couleurs" (pique, cœur, carreau, trèfle) comme l'indique le tableau suivant où chacun des 32 rectangles représente une carte de ce jeu:

	As	Roi	Dame	Valet	10	9	8	7
Pique					×			
Cœur	×							
Carreau			×					
Trèfle					×			

Dans un premier temps, le joueur parie 4 cartes à raison d'une seule par couleur. Un tirage au sort parmi les 32 cartes désigne ensuite une carte par "couleur", de façon équiprobable pour chacune des "hauteurs". Les tirages de "hauteur" et "couleur" sont indépendants.

Par exemple, un joueur a parié sur les 4 cartes marquées d'une croix × dans le tableau : 10 de pique, as de cœur, dame de carreau et 10 de trèfle. Le sort a désigné ensuite : dame de pique, 7 de cœur, dame de carreau et roi de trèfle. Ainsi, le joueur, qui avait fait le pari, a une seule bonne carte parmi les 4 sorties.

Tout joueur empoche au tirage un certain nombre de fois sa mise dans les seuls cas suivants :
- s'il a bien choisi les 4 cartes sorties, il empoche 1000 fois sa mise ;
- s'il a choisi seulement 3 des 4 cartes sorties, il empoche 30 fois sa mise ;
- s'il a choisi seulement 2 des 4 cartes sorties, il empoche 2 fois sa mise.

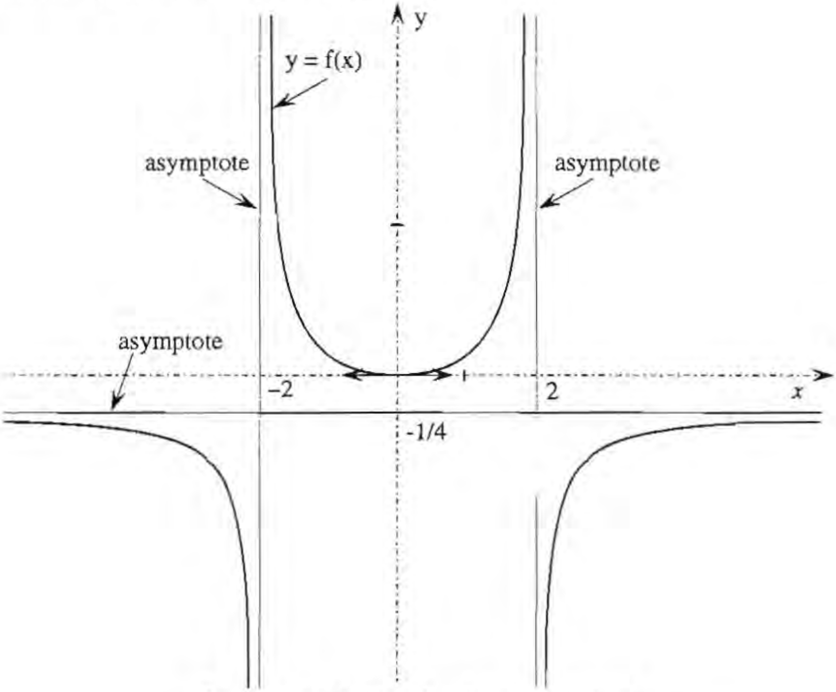
1° Quelle est la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de cartes bien choisies par le joueur parmi les 4 cartes sorties ?
Donner une valeur approchée de chacune des probabilités.

2° Le joueur qui parie 10 francs lors d'un tirage a une certaine espérance de gain (qui peut être négative). La calculer.

******

5

Proposer, et la définir explicitement par une relation algébrique, une fonction réelle f dont la courbe représentative ait l'allure suivante avec 2 asymptotes verticales, une asymptote horizontale et une tangente horizontale en 0. Expliquez les raisons de vos choix.



Barème probable : 3 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3

COMMENTAIRES A PRIORI DE L'EXEMPLE 1

L'ensemble de l'épreuve est équilibré de telle façon que tout élève qui a produit un travail régulier pendant les deux dernières années de son 2ème cycle puisse obtenir une note au moins égale à 10. Contrairement aux épreuves classiquement présentées au baccalauréat, celle-ci nécessite pour l'excellence des résultats une couverture large des notions enseignées en première et terminale (ne se réduisant pas à la seule analyse) et des capacités développées au lycée. Cette étendue est fondamentale dans notre proposition de texte : elle permet de mettre en évidence, comme nous le verrons, des qualités prédictives de bonne intégration dans des cycles supérieurs. En contrepartie, un résultat moyen peut être atteint par une bonne connaissance de son cours et une compréhension convenable des exercices traditionnels, en dépit de quelques "trous" dans la couverture des programmes .

On remarquera le petit texte préalable qui donne brièvement mais explicitement une des règles du contrat selon lequel évaluera le correcteur. Le soin, la précision et la rigueur sont certes des qualités différemment appréciées, mais de toute façon sont prises en compte par la majorité des correcteurs. De plus, elles sont partie intégrante de ces qualités que l'enseignement des mathématiques doit développer. Le rappeler en en-tête ne peut que renforcer la connaissance des critères d'exigence et expliquer, d'emblée, l'origine de certaines distorsions dans la notation.

La question sur des connaissances de base

La démonstration attendue n'est que la restitution d'une proposition traditionnellement établie dans toutes les classes et ne présentant pas de variantes très différentes. ce qui en facilite et homogénéise la correction. De plus, la conclusion n'est pas triviale et ainsi donne un sens à la recherche d'une preuve mathématique. L'accompagnement de la démonstration par une figure semble aller de soi puisqu'il est nécessaire de designer les points en jeu.

Exercice 1

Concepts mobilisés : valeur absolue, coefficient directeur, traduction graphique d'inéquations.

Capacités nécessaires : traduire une relation algébrique en une figure dans le plan repéré ; effectuer une représentation soignée et relativement précise.

La simplicité des concepts en jeu ne doit pas laisser croire que cet exercice ne mesure pas grand-chose par rapport aux capacités requises en termi-

nale scientifique. En effet, il s'agit d'effectuer correctement et avec soin la traduction graphique d'une propriété analytique d'une fonction quelconque, c'est-à-dire non explicitement donnée. La prise en compte de la valeur absolue nécessitera une référence à la symétrie centrale, remarque non triviale.

Exercice 2

<u>Concepts mobilisés</u> : *traduction de relations fonctionnelles à une et deux dimensions, valeur absolue, séparation des cas.*

<u>Capacités nécessaires</u> : *traduire une relation vectorielle en une relation algébrique ; passer de la représentation à une dimension à une représentation à deux dimensions ; savoir distinguer les cas alternatifs.*

Peu de concepts en jeu également dans cet exercice qui évaluera surtout les capacités à traduire sur un axe et dans le plan des relations une fois celles-ci établies. L'élève devra prendre conscience de la simplification obtenue grâce au graphique plan à condition d'y avoir effectué une représentation soignée.

Exercice 3

<u>Concepts mobilisés</u> : *identité remarquable (!), nombre premier, divisibilité, décomposition d'un nombre en facteurs premiers.*

<u>Capacités nécessaires</u> : *savoir "bricoler" sur les entiers naturels ; raisonner de façon exhaustive sur des propriétés arithmétiques.*

Liberté est laissée à l'élève de traduire la question à l'aide de paramètres judicieux non fournis dans le texte. Les concepts arithmétiques sont élémentaires mais les démarches à déployer présentent un grand intérêt : approche heuristique d'une solution, travail par exhaustion. L'arithmétique se prête bien à ces types de démarches qui valorisent à la fois le tâtonnement et la systématisation peu activés dans un problème d'analyse.

Exercice 4

<u>Concepts mobilisés</u> : *dénombrement sur un ensemble de cardinal petit (vérification "à la main" accessible), variable aléatoire discrète, espérance mathématique.*

<u>Capacités nécessaires</u> : *reconnaître une situation mathématique dans une situation du réel ; probabiliser une situation équirépartie ; mener un calcul simple avec une calculette.*

Le problème est classique mais nécessite une petite modélisation comme en présentent souvent les problèmes de probabilité. La variable aléatoire admet une loi qui se dégage aisément du calcul combinatoire sur un ensemble équiréparti.

Exercice 5

Concepts mobilisés : asymptote, tangente à une courbe, points remarquables dans une relation fonctionnelle $x \mapsto f(x)$.

Capacités nécessaires : changer de registre ; savoir identifier des propriétés relationnelles à partir d'une figure.

L'intérêt essentiel d'un tel exercice est de mesurer la capacité à passer du registre graphique au registre algébrique formel. C'est à partir de l'association des propriétés lues sur la figure selon un code classique que l'élève doit reconstruire pas à pas une formule explicite liant x à $f(x)$. Une méthode essais-erreurs est possible mais la solution à trouver n'est pas unique. Cet exercice offre une certaine ouverture que l'élève doit pouvoir maîtriser.

Finalement, on constatera que le nombre et la variété des démarches et des concepts sont très importants et que certains exercices laissent une part d'initiative aux élèves. Tout ceci confère à l'ensemble de l'épreuve une certaine complexité, alors que chacun des exercices semble traitable des le niveau de la première. La très bonne réussite d'un élève serait significative d'un bagage homogène à des niveaux taxonomiques supérieurs sans faire appel à une grande technicité, significative également d'une capacité à passer d'un cadre à un autre (géométrique, algébrique, aléatoire, arithmétique) et d'un registre à un autre (métalangage, langage formel, graphique).

EXEMPLE N°2 DE SUJET DE BACCALAURÉAT - TERMINALE S

Le soin, la rigueur et la précision apportes à la rédaction, à la présentation des résultats et à la validation des affirmations seront pris en compte dans la notation.

Connaissance de base

Démontrer que, s'il existe, le barycentre G de trois points (A, a), (B, b) et (C, c) est le barycentre de (A, a) et de (I, $b + c$), où I désigne, s'il existe, le barycentre des deux autres points (B, b) et (C, c).

Exercices

Les exercices suivant sont indépendants.

1

Considérons la suite de terme général $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. On cherche à prouver qu'elle est divergente.

1° Démontrer que, pour tout n : $S_{2n} \geqslant \frac{1}{2} + S_n$.

2° Démontrer par récurrence sur k que, pour tout k, il existe n tel que : $S_n > k$.
Qu'en déduisez-vous ?

3° Que pensez-vous de la suite partielle : $u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}$?

Justifiez votre opinion.

****

2

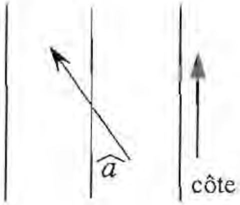
On veut remarquer une propriété de l'écriture décimale de certaines fractions rationnelles.

1° En utilisant votre calculatrice, donnez le résultat qu'elle affiche pour la division de 481 par 999. Que remarquez-vous ?

2° Inversement, déterminer la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, telle que son développement décimal se présente sous la forme périodique : 0,792 792 792 ...

3° Le développement ayant dans la question 2 pour période 3, donnez un exemple où la période serait 2, puis un autre où la période serait 4. A partir des remarques précédentes, formulez, sans la démontrer, une propriété générale.

3



Je monte à bicyclette une côte à 8% (élévation de 8 m pour 100 m sur le plat) sur une route bien droite. Sous quel angle $\widehat{a}$ par rapport à l'axe de la route dois-je choisir ma trajectoire afin de ne plus monter cette côte qu'à 5% ?

****

4

On veut déterminer tous les points d'une ellipse en ne possédant que les informations suivantes :

* les points A et A' à distance maximale sur l'ellipse sont donnés,

* un 3ème point M de l'ellipse n'appartenant pas à la médiatrice de [A, A'] est également donné.

Elaborez et justifiez un algorithme géométrique permettant de retrouver tous les autres points de l'ellipse. Construisez avec soin, en particulier trois d'entre eux, n'admettant pas de relation symétrique mutuelle.

****

5

Deux petites salles de cinéma A et B de même capacité n spectateurs, se vident en même temps à la fin du film qui y était projeté. L'ensemble des spectateurs passent un à un, de façon indépendante, par la même porte de sortie. On suppose que la probabilité qu'un spectateur qui franchit la porte sorte de la salle A ou sorte de la salle B est la même (donc égale à 1/2).

Quelle est en fonction de n et de k la probabilité pour que le dernier spectateur de l'une quelconque des deux salles sorte alors qu'il reste encore $(n - k)$ spectateurs dans l'autre salle ?

Donner une estimation de cette probabilité pour $n = 100$, $k = 10$, sachant que $2^{10} \approx 10^3$.

****

Barème probable : 3 + 4 + 3 + 3 + 4 + 3

COMMENTAIRES A PRIORI DE L'EXEMPLE 2

Les commentaires du préambule de l'exemple 1 sont, bien entendu, valables.

La question sur des connaissances de base

La démonstration attendue exige encore la restitution d'une proposition du cours. Elle est classique et a fait l'objet en classe de nombreuses applications. Bien que non demandée, une figure spontanément donnée signifierait la compréhension plus profonde de la propriété du barycentre.

Exercice 1

Concepts mobilisés : suite numérique à termes positifs, ordre sur les réels

Capacités nécessaires : savoir majorer ou minorer terme à terme ou par le choix approprié d'un terme ; savoir conduire un raisonnement par récurrence ; savoir réinvestir un processus

L'objectif est volontairement déclaré d'emblée afin que les élèves disposent d'une clé explicative des questions intermédiaires. Ces questions, relativement indépendantes, sont conformes au sens-même d'une fonction essentielle de l'enseignement de l'analyse qui est d'apprendre à majorer et minorer. La difficulté présente du raisonnement par récurrence tiendra au conflit entre le raisonnement sur n ou sur k.

Exercice 2

Concepts mobilisés : développement décimal illimité ; fraction rationnelle ; fraction irréductible

Capacités nécessaires : raisonner inductivement ; trouver un exemple personnel ; généraliser

La question initiale doit faire apparaître une propriété liée à la division par 999 qui servira dans la question 2. Cette remarque est un guide réinvestissable immédiatement dans la construction des deux exemples demandés. Ce type de question ouverte risque de désarçonner les élèves non habitués à rechercher eux-mêmes des exemples respectant des contraintes et satisfaisant des propriétés.

Exercice 3

Concepts mobilisés : pente d'une droite de l'espace ; projection orthogonale dans l'espace ; relations trigonométriques simples

Capacités nécessaires : mathématiser une situation du monde réel ;

représenter sur la feuille une situation géométrique de l'espace ; en maîtriser la perception

Il s'agit pour l'élève de décoder la figure donnée puis de reconnaître et d'identifier le problème comme un vrai problème de géométrie. La difficulté résidera ensuite dans la maîtrise des relations géométriques définies par la situation, sans nécessiter des prouesses techniques dans le calcul trigonométrique.

Exercice 4

Concepts mobilisés : *ellipse ; relation entre un point du cercle principal et un point de l'ellipse*

Capacités nécessaires : *traduire en algorithme une suite d'opérations graphiques ; le rendre opérationnel un certain nombre de fois*

La connaissance du cours sur une propriété de l'ellipse est indispensable ici. Mais l'usage de cette propriété est inverse de celui généralement utilisé. C'est donc la réversibilité d'une relation qui doit être mobilisée. Par la suite, l'algorithme doit être suffisamment explicite pour être fonctionnel. Le soin apporté à la construction est pris en compte.

Exercice 5

Concepts mobilisés : *probabilité ; événements indépendants ; variables aléatoires ; loi binomiale*

Capacités nécessaires : *mathématiser une situation ; développer une preuve en probabilité élémentaire ; effectuer une approximation "à la main"*

La première difficulté réside encore dans la reconnaissance d'un problème mathématique dans une situation réelle, puis dans l'identification d'un modèle probabiliste sous-jacent (définir des événements ou des variables aléatoires associés à la situation). Une autre difficulté se présente lorsque l'on doit notifier l'indépendance de deux événements ou de deux variables aléatoires. La dernière difficulté est d'ordre numérique : il faut savoir donner un ordre de grandeur à des produits de nombres.

EXEMPLE N°3 DE SUJET DE BACCALAURÉAT - TERMINALE L

Le soin et la précision apportés à la rédaction, à la présentation des résultats et à la validation des affirmations seront pris en compte dans la notation.

Connaissance de base

Démontrer que l'application de $\mathbb{R} - \{2\}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $\dfrac{x+2}{x-2}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{2\}$.

Exercices

Les exercices suivant sont indépendants.

1

4 jeunes gens A, B, C et D veulent aller en "boîte" dans la voiture de A. Mais l'entente ne règne pas très bien dans le groupe :

a) B décide de ne pas y aller si C vient ;

b) C ne viendra pas si D ne vient pas ;

c) D accepte d'y aller si B y va et seulement à cette condition ;

d) A refuse de partir seul.

Quelle solution ont-ils adoptée, compatible avec ces exigences, sachant que A y est allé ?

****

2

Deux populations se développent selon deux suites arithmétiques (u_n) et (v_n).

La première a pour raison r = 2 et pour valeur initiale $u_0 = 7$.

La seconde a pour raison s = 3 et pour valeur initiale : $v_0 = 2$.

1° Pour quelle valeur de n prennent-elles la même valeur ?

2° Existe-t-il un rang n pour lequel la valeur de l'une des deux suites pour ce rang est multiple de la valeur de l'autre pour le même rang (sans lui être égale) ?

****

3

On considère la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur [0 ; 6]. On veut partager l'aire sous la courbe en 3 aires égales par le choix de deux points a et b de l'intervalle de définition. Ainsi, l'aire sera la même quand x décrira $[0~;~a]$, puis $[a~;~b]$, puis $[b~;~6]$.

Exprimer a et b à l'aide de racines cubiques.

****

4

Un signal est émis par une source sous la forme de 1 et de 0. Par exemple, à chaque seconde, une source lumineuse est allumée (soit le signal 1) ou éteinte (soit le signal 0). Les probabilités d'émission du signal sont respectivement :

p pour le signal 1 et $q = 1 - p$ pour le signal 0.

Chaque signal est reçu (ou perçu) <u>conformément</u> à son émission avec la probabilité $\alpha < 1$. Il y a donc des distorsions entre le signal émis et le signal reçu.

1° Dresser un arbre des possibles pour représenter les différents cas d'émission et de réception.

2° Quelles sont les probabilités respectives de réception de 1 et de 0 en fonction de p et de α ?

3° Calculer ces probabilités dans le cas : $p = \alpha = \dfrac{4}{5}$.

4° Si $\alpha = \dfrac{2}{3}$, quelle est la probabilité p affectée à la source si l'on reçoit en moyenne autant de 0 que de 1 ?

****

Barème probable : 3 + 4 + 4 + 4 + 5

COMMENTAIRES A PRIORI DE L'EXEMPLE 3

La question sur des connaissances de base

La difficulté réside dans l'exigence du réinvestissement et de l'actualisation de la méthode générale qui a été présentée en cours. Il est à prévoir que des élèves se précipitent - quand ils la connaissent - sur la formule du type u/v et confondent ainsi le calcul et la preuve de l'existence qui légitime elle-même le calcul. L'objectif principal du choix de cette question réside donc dans la nécessité de prise de conscience d'une réflexion en amont de l'emploi d'un algorithme vers lequel se réfugient plus particulièrement les élèves de classes non scientifiques.

Exercice 1

Concepts mobilisés: connecteurs logiques du discours ordinaire ; représentation arborescente ;

Capacités nécessaires : comprendre un langage articulé par des connecteurs ; traduire par un schéma arborescent des cas dichotomiques et séquentiels.

Il est vraisemblable que les élèves ne penseront pas spontanément à traduire les phrases en un arbre dichotomique de sommet initial "A, oui", sur lequel ils possèdent pourtant une information isolée, et de sommets suivants les autres cas : "B, oui", "B, non ", etc. Ils essaieront d'articuler les contraintes en prenant le risque de ne pas disjoindre les cas et en ne traitant pas le problème de façon séquentielle. Par contre, l'emploi d'un arbre permet d'associer une éventualité à chaque chemin de l'arbre, qu'il est possible ensuite de réfuter ou accepter.

Exercice 2

Concepts mobilisés : suite arithmétique, raison, terme général, équation en termes entiers, multiple d'un entier;

Capacités nécessaires : traduire du langage ordinaire en des expressions mathématiques, conduire un raisonnement arithmétique de façon exhaustive par examen des cas possibles.

Cet exercice est simple dès que l'élève sait écrire le terme général d'une suite arithmétique car l'équation à résoudre est du premier degré. Cependant, le petit raisonnement à faire dans le 2° peut arrêter quelques élèves peu habitués à raisonner sur des entiers.

Exercice 3

Concepts mobilisés : représentation graphique d'une fonction, parabole, intégrale définie, racine cubique ;

Capacités nécessaires : intégrer un monôme, mener un calcul littéral, exprimer une inconnue en fonction d'une autre, résoudre une équation.

Les calculs à mener sont simples et au niveau de l'intégration et au niveau de la résolution des équations qui s'en déduisent. Aucun résultat numérique approché n'est attendu, permettant d'éviter le problème de la calculatrice.

Exercice 4

Concepts mobilisés : événements, probabilité conditionnelle, arbre dichotomique ;

Capacités nécessaires : disjoindre les cas, traduire un texte en un arbre, résoudre une équation du premier degré.

Le problème se simplifie dès que l'on perçoit que les événements peuvent s'exprimer de façon séquentielle et que, dans ces conditions, un arbre traduit efficacement la situation. Il faut peut-être craindre que les élèves soient arrêtés par l'expression physique du problème.

ANNEXE I :
BROUILLONS POUR DES SUJETS DE BAC DU 3ème MILLÉNAIRE...
(par Daniel REISZ)

L'APMEP, mais aussi les instances institutionnelles (IREM, IGEN, DLC,...) ont engagé une réflexion sur le contenu, le profil et l'esprit des épreuves de mathématiques du baccalauréat. Aux journées de Marseille, toutes sortes de propositions ont été émises par les uns et les autres (retour à une question de cours, QCM, exercices et/ou problèmes plus ouverts, etc.). J'exclus ici un autre débat qui a parasité celui-ci : le statut des calculatrice. Supposons aussi que le contenu des programmes reste à peu près stable, même si on sent une volonté d'en faire évoluer l'esprit (troisième débat majeur de cette fin de siècle). Et puisque nous parlons programme, relisons quelques objectifs des actuels programmes : expérimenter, conjecturer, raisonner, communiquer, organiser,... On peut alors légitimement se demander si les épreuves actuelles du baccalauréat vont dans le sens de ces objectifs. Certes, on m'objectera, à juste titre, qu'il faut distinguer les objectifs d'évaluation d'un examen de masse et les objectifs de formation d'un enseignement, mais il faudrait être bien naïf de sous-estimer l'effet rétroactif de la forme des épreuves d'examen sur la formation dispensée.

Afin d'éviter qu'on en reste aux pétitions de principe, je jette, non pas un pavé, mais plusieurs cailloux dans la mare, sous forme d'exercices à énoncés plus ouverts, demandant aux élèves certaines initiatives (choix de notations pertinentes, angle d'attaque, choix des outils, etc.) Posons en axiome de 2/3 à 3/4 des candidats seront reçus, coûte que coûte et que notre discipline doit jouer un rôle discriminant. Le problème consiste alors à répondre à deux questions :

- *de nouvelles épreuves assureront-elles mieux la formation scientifique et générale des élèves, par leur rôle rétroactif ?*
- *de nouvelles épreuves "sélectionneront-elles" d'autres (de meilleurs ?) profils d'élèves que les épreuves actuelles ?*

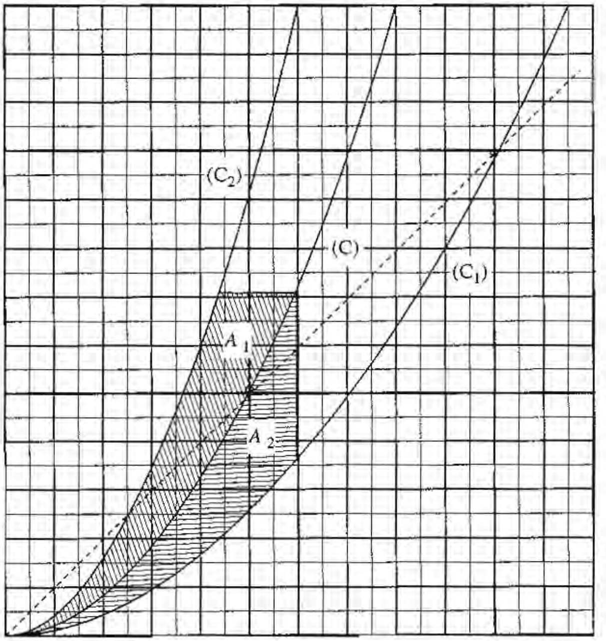
Soyons clairs! Les épreuves ne doivent sans doute pas être uniquement constituées de problèmes à énoncés ouverts. Rien n'empêchera d'évaluer aussi des connaissances précises ou un savoir-faire de pure routine. Mais les difficultés majeures de tels énoncés me semblent relever de deux ordres :

- *nécessité de laisser du temps au candidat pour s'approprier un tel problème ;*

- *l'évaluation de la production d'un candidat ne pourra en aucun cas se solder à la seule "solution", mais devra prendre en compte les idées avancées, la qualité de leur exposition, l'analyse des difficultés et des échecs : bref, un rapprochement sensible de la démarche d'évaluation de nos collègues des disciplines littéraires.*

Les énoncés qui suivent (conçus "évidemment" pour des élèves de la série S) veulent simplement être du grain à moudre pour alimenter le débat, sans aucun souci normatif. Gardons-nous de nos certitudes, gardons-nous de la précipitation et sachons exiger des décideurs le temps nécessaire pour habituer les élèves à ,une évolution qui pourrait, qui devrait, être profonde. Enfin, soyons conscients que les choix qui seront faits seront idéologiques, que ce soit pour la vision que nous avons des mathématiques, que ce soit pour notre conception de l'apprentissage, que ce soit pour le rôle que nous entendons faire jouer à l'École.

Enoncé 1



On dit qu'une courbe (C) "bissecte" en termes d'aire les courbes (C_1) et (C_2) si, pour tout $t > 0$, les aires des deux domaines hachurés A_1 et A_2 sont égales.

On suppose que :

(C) a pour équation $y = x^2$ (C_1) a pour équation : $y = \frac{1}{2}x^2$

Déterminer l'équation de (C_2).

Indication : observer le symétrique du domaine A_2 par rapport à la première bissectrice du repère.

Enoncé 2

Entendu dans un bistrot : *"Comment se fait-il que je ne trouve jamais les trois chevaux du tiercé, avec quinze chevaux au départ, alors qu'au Loto j'en ai très souvent trois de bons sur sept et pourtant je dois les choisir parmi quarante neuf ?"*

Commentez cette "brève de comptoir".

Enoncé 3

Pour $x > 0$, on considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \ln x$$

$$g(x) = k\sqrt{x}$$ où k est une constante strictement positive.

On sait que pour x voisin de 0 et pour x voisin de $+\infty$, $f(x) < g(x)$.

On peut vérifier, par exemple sur une calculatrice graphique,

- que si $k = 1$ $\quad f(x) < g(x)$ pour tout x positif
- que si $k = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) > g(x)$ sur un certain intervalle.

On peut donc penser qu'entre $\frac{1}{2}$ et 1, il existe une valeur de k et une valeur α de x telles que

$f(x) < g(x)$ pour tout $x \neq \alpha$

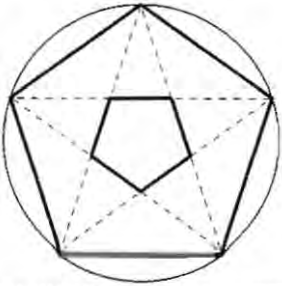
$f(\alpha) = g(\alpha)$

et qu'en ce point d'abscisse α les deux courbes soient tangentes.

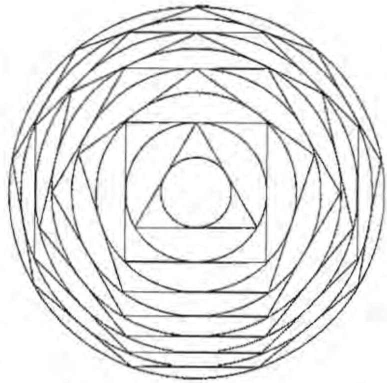
Etudier cette situation.

Enoncé 4

La figure ci-contre représente un pentagone régulier, le pentagone étoilé associé et on peut remarquer à l'intérieur de ce dernier un petit pentagone régulier. Le cercle circonscrit a pour rayon R. Déterminer les différents angles et longueurs caractéristiques de ces différents pentagones, ainsi que la transformation permettant de passer du grand au petit.



Enoncé 5



La figure ci-contre montre les première étapes d'une construction itérative, à partir d'un premier stade : le triangle équilatéral et son cercle circonscrit.

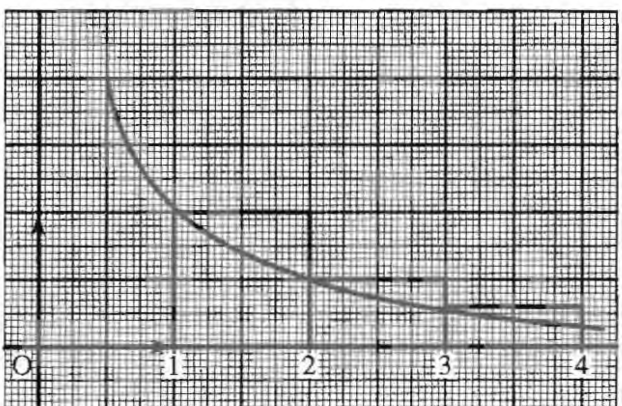
Après avoir décrit de façons précise cette procédure itérative qu'on peut imaginer se poursuivre indéfiniment, on se posera quelques questions pertinentes à son sujet. On ne demande pas de rédiger la solution à ces questions, mais leur faisabilité, avec les connaissances mathématiques d'un lycéen, seront un élément important de l'évaluation.

Enoncé 6

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, et pour tout entier $n \geqslant 0$, $e^x \geqslant \frac{x^n}{n\,!}$ en étudiant les fonctions f_n définies par $f_n(x) = e^x - \frac{x^n}{n\,!}$ (On admettra par convention que $0! = 1$)

Indication : pour comprendre ce qui se passe, on pourra commencer par étudier f_0, f_1, f_2. En déduire que si $x \geqslant (n+1)!$, alors $e^x \geqslant x^n$

Enoncé 7



La courbe sur la figure ci-contre est représentative de la fonction définie, pour $x > 0$ par $y = \frac{1}{x}$

En observant les rectangles du dessin, de quelle suite (u_n) peut-on démontrer la convergence ou la divergence ?

Énoncé 8

Un parallélogramme est inscrit dans un autre (c'est-à-dire que ses quatre sommets se trouvent respectivement sur les quatre côtés de l'autre). Quelle est la distance séparant les deux centres ?

A-t-on une propriété analogue pour un triangle équilatéral inscrit dans un triangle équilatéral ?

Enoncé 9

Quel est l'ensemble des points décrits par le centre d'un triangle équilatéral dont un sommet est fixe et un autre sommet décrit un cercle (Γ) ?

Que se passe-t-il pour un triangle quelconque dont les angles restent constants, dont un sommet est fixe et dont un autre sommet décrit un cercle ?

ANNEXE II: EXERCICES "INTERMÉDIAIRES"...

Exemple n° 1, niveau Terminale

(par Sylviane GASQUET)

On considère la fonction $x \mapsto e^x + \frac{x^3}{3} - x - 1$.

1° Sa dérivée a-t-elle un signe accessible?

2° On considère la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{x^3}{3} - x$. Étudier son sens de variation. Que peut-on en déduire pour le sens de variation de la fonction φ ?

3° On considère maintenant la fonction : $x \mapsto g(x) = e^x - x$. Étudier son sens de variation. Que peut-on en déduire pour le sens de variation de la fonction φ?

4° Finalement, sur quel intervalle ne peut-on pas encore conclure après ces deux études ?

5° On note $\mathcal{C}_\varphi$ la courbe représentant la fonction φ dans un repère orthonormé. Déterminer les points de la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ d'abscisse -1 et d'abscisse 0. La fonction φ est-elle monotone sur $\mathbb{R}$?

6° Construire avec soin les tangentes à $\mathcal{C}_\varphi$ aux points d'abscisse -1 et d'abscisse 0. En déduire un tracé possible de la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.

Pistes pour le corrigé

L'élève doit apprendre à limiter ses conclusions sur un ou plusieurs intervalles, et éventuellement à la fin, à préciser le statut de ce qu'il énonce.

2° *Comme la fonction* $x \mapsto e^x - 1$ *croît sur* $\mathbb{R}$ *la fonction* φ *croît lorsque* f *croît (somme de deux fonctions croissantes) donc sur* $]-\infty ; -1]$ *et sur* $[+1 ; +\infty[$. *Sur l'intervalle* $[-1 ; +1]$ *on ne peut pas conclure.*

3° *Comme la fonction* $x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ *croît sur* $\mathbb{R}$, *la fonction* φ *croît quand* g *est croissante, c'est-à-dire sur* $[0 ; +\infty[$.

4° *On ne peut pas encore conclure sur* $[-1 ; 0]$.

5° $\varphi(-1)$ *est supérieur à* $\varphi(0)$ *donc la fonction n'est pas croissante sur* $\mathbb{R}$

6° *Au point* $\left(-1\ ;\ \frac{1}{e}-\frac{1}{3}\right)$ *la pente est de* $\frac{1}{e}$ *. A l'origine, la pente est* 0. *Cela permet d'avoir un dessin assez précis de la courbe bien que ne connaissant pas le maximum.*

Type de remarques susceptible de donner un "bonus" hors barème:

"...mais ce tracé suppose que la fonction φ ne change pas plusieurs fois de sens de variation entre 1 et 0. Cette supposition est légitime compte tenu de la régularité des fonctions dont elle est la somme."

Et avec une calculatrice graphique :

La non monotonie se voit sur l'écran d'une calculatrice mais à condition de bien utiliser celle-ci. ($-2 \leqslant x \leqslant 1$ et $-0{,}5 \leqslant y \leqslant 0{,}5$ *par exemple*).

Commentaires:

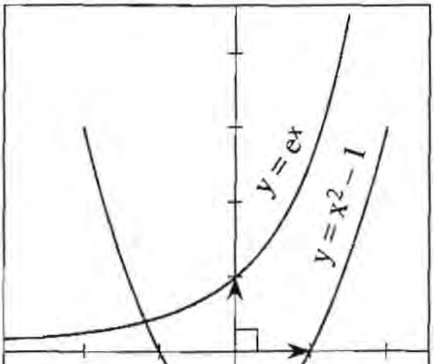
Cet exercice est catalogué "d'intermédiaire" en ce sens qu'il guide encore l'élève et aussi parce qu'il impose le cadre fonctionnel, puis graphique à la 6ème question. Mais il a sa place dans cette plaquette en ce sens qu'il est bien dans l'esprit du renouvellement souhaité et qu'il amène l'élève à se poser des questions sans y répondre à sa place... avec l'avantage de lui apprendre à savoir limiter ses conclusions ou à reconnaître une impasse.

Dans un deuxième temps, on pourra alors ouvrir encore davantage ce type d'exercice. Il y a alors fort à parier qu'un élève suffisamment entraîné aux changements de cadres et aux changements de registres prenne l'initiative de les combiner.

Par exemple pour étudier le signe de $\varphi'(x) = e^x + x^2 - 1$:

sur $[0\ ;+\infty[$: $e^x \geqslant 1$ et $x^2 - 1 \geqslant -1$
donc sur $[0\ ;+\infty[$: $e^x + x^2 - 1 \geqslant 0$

et sur $]-\infty\ ;-1]$: $e^x > 0$ et $x^2 - 1 \geqslant 0$
donc sur $]-\infty\ ;-1]$: $e^x + x^2 - 1 > 0$
φ est donc croissante sur
$]-\infty\ ;-1] \cap [0\ ;+\infty[$



Exemple n°2, niveau Première (avant l'étude des dérivées)
(par Jean-Pierre RICHETON sur le modèle du précédent)

Connaissances de base ...

1° Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. Est-il possible de déduire la monotonie de la fonction $f + g$ sur I sachant que :
a) les fonctions f et g ont la même monotonie sur I ? Justifier.
b) les fonctions f et g sont de monotonies différentes sur I ? Justifier.
2° Reprendre les questions précédentes avec la fonction $f \times g$.

Exercice:

On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$.

1° Compléter le tableau de valeurs ci-contre :

	-2	$-1,5$	-1	0	1	1,5	2
$\varphi(x)$							

2° Quelle conjecture pourrait-on être tenté de faire ?

3° On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}$. Indiquer son sens de variation (justifier). Que peut-on en déduire pour la fonction φ ?

4° En utilisant le fait que $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2}x^2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$, sur quel intervalle peut-on alors en déduire son sens de variation ? (justifier).

5° Finalement sur quel intervalle ne peut-on pas encore conclure pour la monotonie de φ ?

6° Établir un nouveau tableau de valeurs permettant tout de même de s'en faire une petite idée:

	-2	$-1,5$	-1	0	1	1,5	2
$\varphi(x)$							

Les commentaires *concernant l'exercice précédent restent bien sûr valables et ici aussi le cadre graphique apporte également des possibilités de réponse.*

Compte rendu d'expérience:

Ce sujet a été donné, en devoir à la maison, dans une classe de 1ère S où les connaissances de base demandées n'avaient pas encore été abordées.

Connaissances de base ...

Excepté quelques élèves qui se sont contentés d'énoncer des résultats sans les justifier, la plupart d'entre-eux démontrent assez bien que la fonction $f + g$ a même monotonie que f et g dans le cas 1a) et arrivent à énoncer de façon satisfaisante la propriété démontrée.

Pour la question 1b), un seul élève conclue que l'on peut déduire la monotonie de $f + g$, un autre confond monotonie et signe de la fonction, mais les autres rédigent pour la plupart une explication souvent très bien argumentée. Ainsi, quelques élèves appuient leur conclusion avec des contre- exemples bien choisis comme par exemple:

- *$f : x \mapsto -x$, décroissante sur $\mathbb{R}$, $g : x \mapsto x$, croissante sur $\mathbb{R}$ et $f + g$ constante sur $\mathbb{R}$*
- *$f : x \mapsto -2x$, décroissante sur $\mathbb{R}$, $g : x \mapsto x$, croissante sur $\mathbb{R}$ et $f + g$ décroissante sur $\mathbb{R}$*
- *$f : x \mapsto 2x$,, croissante sur $\mathbb{R}$, $g : x \mapsto -x$, décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f + g$ croissante sur $\mathbb{R}$*

Signalons également quelques élèves qui modifient la question 1b) et étudient la monotonie de $f - g$ pour ensuite conclure que cela n'est pas faisable pour $f + g$.

Par contre pour $f \times g$, le bilan est plus mitigé car un bon nombre d'élèves n'ont pas pris en compte le signe des fonction sur I. On peut cependant signaler des études assez poussées, qui outre les cas des fonctions de même monotonie et de même signe sur I, étudient également les cas où f est croissante et positive sur I avec g décroissante et négative sur I, puis f décroissante et positive sur I avec g croissante et négative sur I

Exercice:

Quelques élèves conjecturent de façon abusive que φ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais ce ne sont pas les plus nombreux et l'on peut trouver très satisfaisant que la majorité d'entre eux arrêtent leur conjecture à l'intervalle $[-2 ; 2]$.

A la question 3°, on peut recenser deux stratégie principales pour démontrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$:

• *Considérer deux réels quelconques a et b tels que* $a < b$*, en déduire que* $a^3 < b^3$ *par croissance de la fonction de référence* $x \mapsto x^3$*, puis* $\frac{1}{2}a^3 < \frac{1}{2}b^3$ *etc.*

• *Utiliser les fonctions associées à* $x \mapsto x^3$: $x \mapsto \frac{1}{2}x^3$*, puis :*

$x \mapsto \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}$ ...

Il faut noter que près d'un tiers des élèves ne poursuivent pas et donc ne déduisent rien pour la fonction φ*. Quelques uns songent bien à utiliser la fonction* $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$*, mais comme elle n'est pas monotone sur* $\mathbb{R}$*, concluent que l'on ne peut rien en déduire... Il reste néanmoins que la majorité a parfaitement vu le parti que l'on pouvait tirer de la croissance de la fonction f.*

A la question 4°, les réponses à la question 2° de la partie connaissances de base ont influées, on s'en doute, sur la qualité des réponses apportées. Il faut signaler également que quelques incohérences commencent à se produire sur certaines copies pour les dernières questions.

Bilan

Ce type d'exercice, nouveau pour un grand nombre d'élèves, a donc apporté plus qu'on ne pouvait l'espérer, de part la diversité des argumentations utilisées, mais aussi des réponses erronées ou inadéquates parfois d'où, vous vous en doutez, une séance de mise au point qui n'en a été que plus riche et plus vivante.