39^{e} Olympiade Internationale
de Mathématique

Problème 1.

Dans un quadrilatère convexe ABCD, les diagonales AC et BD sont perpendiculaires et les côtés opposés AB et DC ne sont pas parallèles. On suppose que le point P, intersection des médiatrices de AB et DC, se trouve à l'intérieur de ABCD. Prouver que le quadrilatère ABCD est inscriptible si et seulement si les triangles ABP et CDP ont même aire.

Problème 2.

Une compétition regroupe a participants et b examinateurs, où $b \geq 3$ est un nombre entier impair. Chaque examinateur attribue à chaque participant une des mentions « réussi » ou «échoué ». On suppose que le nombre k est tel que : pour deux examinateurs quelconques, leurs décisions coïncident pour au plus k participants.

Prouver que : $\dfrac{k}{a} \geq \dfrac{b-1}{2b}$.

Problème 3.

Pour tout entier n strictement positif, on désigne par $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n (y compris 1 et n). Trouver tous les entiers strictement positifs k pour lesquels il existe n tel que $\dfrac{d(n^2)}{d(n)} = k$.

Problème 4.

Trouver tous les couples (a,b) d'entiers strictement positifs tels que $ab^2 + b + 7$ divise $a^2b + a + b$.

Problème 5.

Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Ce cercle est tangent aux côtés BC, CA et AB du triangle, en les points K, L et M respectivement. La droite parallèle à MK passant par B coupe les droites LM et LK respectivement en R et S. Prouver que l'angle $\left(\overrightarrow{IR}, \overrightarrow{IS}\right)$ est aigu.

Problème 6.

On considère toutes les applications f de l'ensemble N* de tous les entiers strictement positifs dans lui-même, qui vérifient $f\left(t^2 f(s)\right) = s\left(f(t)\right)^2$, quels que soient s et t dans N*. Déterminer la plus petite valeur possible de f(1998).