

# Les Problèmes de l'APMEP

---

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Pour mieux équilibrer le bulletin et réduire le décalage entre énoncés et solutions, le Comité de Rédaction a décidé de ne pas proposer de nouveaux énoncés dans le présent numéro, à titre exceptionnel, mais de les remplacer par les énoncés de l'Olympiade Internationale de Mathématique (Taipei, 15 et 16 juillet 1998) dont des solutions ne paraîtront pas dans le bulletin mais seront disponibles prochainement sur le serveur de l'APMEP. Ces solutions prendront en compte vos démonstrations et réactions, que vous pouvez m'envoyer à l'adresse ci-dessous. La complémentarité entre bulletin et serveur s'étendra à d'autres problèmes : l'étude de la cubique de l'énoncé 260 ne sera pas détaillée dans le bulletin, mais des compléments seront accessibles sur le serveur.

Par ailleurs, le groupe des lecteurs assidus de la présente rubrique a acquis une expérience, notamment en géométrie, que n'ont probablement pas les nouveaux lecteurs. Afin de répondre à une demande élargie, la rubrique est ouverte à des énoncés plus faciles que ceux habituellement proposés : énoncés (faciles ou difficiles), solutions et commentaires sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom et si possible votre adresse sur chaque feuille) :

**François LO JACOMO**  
42 quai de la Loire  
75019 PARIS

## ÉNONCÉ 257 (Jacques BOUTELOUP 76 - ROUEN)

Soient un triangle  $ABC$ , deux points  $P, P'$  de  $BC$ , deux points  $Q, Q'$  de  $CA$  et deux points  $R, R'$  de  $AB$ . On désigne respectivement par  $I, J, K, I', J', K'$  les points d'intersection de  $BQ$  et  $CR'$ ,  $CR$  et  $AP'$ ,  $AP$  et  $BQ'$ ,  $BQ'$  et  $CR$ ,  $CR'$  et  $AP$ ,  $AP'$  et  $BQ$ . On désigne par  $(\Pi)$  la propriété :  $AI, BJ$  et  $CK$  concourent en un point (noté  $M$ ). Démontrer que  $(\Pi)$  entraîne :

- $AI', BJ'$  et  $CK'$  concourent (en un point noté  $M'$ ) ;

- JK, J'K' et BC concourent ;
- II', JJ', KK' et MM' concourent.

Démontrer que (II) est réalisée :

- lorsque AP, BQ, CR d'une part et AP', BQ', CR' d'autre part concourent ;
- lorsque P, Q, R d'une part et P', Q', R' d'autre part sont alignés.

On désigne par U un point distinct de A, B, C, par  $(D_1)$ ,  $(D_2)$ ,  $(D_3)$  les conjuguées respectives de AU, BU, CU par rapport à  $(AB,AC)$ ,  $(BC,BA)$ ,  $(CA,CB)$ . Démontrer que (II) est réalisée lorsque  $(AP,AP')$ ,  $(BQ,BQ')$ ,  $(CR,CR')$  sont respectivement conjuguées par rapport à  $(AU,D_1)$ ,  $(BU,D_2)$ ,  $(CU,D_3)$ . Indiquer deux cas particuliers classiques.

Bien entendu, il s'agit de concourances au sens projectif.

### SOLUTION de l'auteur.

Nous utilisons un repère projectif de triangle de base ABC et désignons par X, Y, Z les coordonnées d'un point. Elles sont liées à ses coordonnées barycentriques  $x, y, z$  par des relations de la forme :  $x = \alpha X, y = \beta Y, z = \gamma Z$ . Nous désignons par  $Z = \lambda Y, Z = \lambda' Y, X = \mu Z, X = \mu' Z, Y = vX, Y = v' X$  les équations respectives de AP, AP', BQ, BQ', CR, CR'. On en déduit des triplets de coordonnées de I, J, K :  $(\mu, \mu'v, 1), (1, v, v\lambda'), (\lambda\mu', 1, \lambda)$ . D'où les équations de AI, BJ et CK :  $Y = \mu v' Z, Z = v\lambda' X, X = \lambda\mu' Y$ . En un point de concours, si l'on pose  $X = 1$ , on doit avoir :  $Z = v\lambda', Y = \mu v' v\lambda', X = \lambda\mu' \mu v' v\lambda'$ .

La propriété (II) s'exprime ainsi par :  $\lambda\lambda'\mu\mu'v v' = 1$ . La condition est invariante par l'échange des lettres primées et non primées. Donc (II) entraîne la concourance de AI', BJ' et CK'.

Lorsque (II) est réalisée, les triangles BJK' et CKJ' sont homologues\*. En effet, BJ et CK se coupent en M, BK' et CJ' se coupent en I, JK' et KJ' se

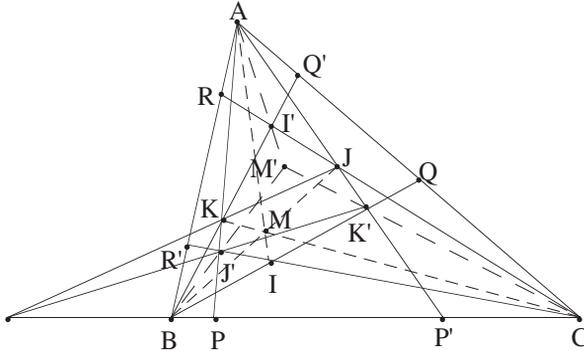
---

\* Rappelons que deux triangles  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  sont homologues si et seulement si :

- les droites  $(A_1A_2)$ ,  $(B_1B_2)$  et  $(C_1C_2)$  sont concourantes (en un point  $M_3$ , pôle ou centre d'homologie),
  - les points  $A = (B_1C_1) \cap (B_2C_2)$ ,  $B = (C_1A_1) \cap (C_2A_2)$  et  $C = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$  sont alignés (sur l'axe d'homologie  $(\Delta)$ ),
- ces deux propriétés étant équivalentes.

Si  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  sont homologues d'axe  $(\Delta)$  et de pôle  $M_3$  et si  $A_2B_2C_2$  et  $A_3B_3C_3$  sont homologues de même axe  $(\Delta)$  et de pôle  $M_1$ ,  $(A_2B_2) \cap (A_3B_3)$ , qui appartient à  $(\Delta)$ , n'est autre que  $C = (A_2B_2) \cap (\Delta)$ . Donc  $A_1B_1C_1$  et  $A_3B_3C_3$  sont eux aussi homologues d'axe  $(\Delta)$  et de pôle  $M_2$  ; en outre,  $A_1A_2A_3$  et  $B_1B_2B_3$  sont homologues de pôle C, de sorte que  $M_1 = (A_2A_3) \cap (B_2B_3)$ ,  $M_2 = (A_3A_1) \cap (B_3B_1)$  et  $M_3 = (A_1A_2) \cap (B_1B_2)$  sont alignés. Edgard Delplanche cite à ce propos les *Exercices de Géométrie moderne* de Papelier.

coupent en A, et A, I et M sont alignés. Donc BC, JK et K'J' sont concourantes. De même, KI et K'I' concourent avec CA, IJ et I'J' concourent avec AB.



(II) étant toujours supposée réalisée, les triangles ABC et IJK sont homologues de pôle M. Donc  $BC \cap JK$ ,  $CA \cap KI$  et  $AB \cap IJ$  sont alignés. Ce sont les trois points de concours mis en évidence au paragraphe précédent, ainsi alignés sur l'axe d'homologie  $\Delta$  de ABC et IJK. Mais ce sont également les points  $BC \cap J'K'$ ,  $CA \cap K'I'$  et  $AB \cap I'J'$  et  $\Delta$  est aussi l'axe d'homologie de ABC et I'J'K' (le pôle d'homologie étant M'). On passe de IJK à I'J'K' par le produit des homologies  $IJK \rightarrow ABC$  et  $ABC \rightarrow I'J'K'$  de même axe  $\Delta$ . C'est donc une homologie, de pôle aligné avec les autres. Autrement dit,  $I'I'$ ,  $J'J'$  et  $KK'$  concourent au pôle d'homologie qui est un point de  $MM'$ .

La propriété (II) est notamment réalisée si  $\lambda\mu\nu = \lambda'\mu'\nu' = 1$ . Le point P a pour coordonnées projectives  $(0,1,\lambda)$ , donc pour coordonnées barycentriques  $(0,\beta,\gamma\lambda)$ . Donc  $\overline{PB}/\overline{PC} = -\gamma\lambda/\beta$ ; de même  $\overline{QC}/\overline{QA} = -\alpha\mu/\gamma\epsilon$  et  $\overline{RA}/\overline{RB} = -\beta\nu/\alpha$ . Donc  $\lambda\mu\nu = 1$  équivaut au produit -1 pour les trois rapports et à la concourance de AP, BQ et CR. De même,  $AP'$ ,  $BQ'$  et  $CR'$  concourent.

La propriété (II) est vérifiée lorsque  $\lambda\mu\nu = \lambda'\mu'\nu' = -1$ . Les résultats ci-

dessus montrent l'alignement de P, Q, R et de P', Q', R'.

Prenons U comme point unitaire du repère projectif. L'équation de AU est  $Z = Y$ ; celle de  $D_1$  est donc  $Z = -Y$ . La conjugaison de AP et  $AP'$  s'exprime par la valeur -1 du birapport  $(\lambda,\lambda',1,-1)$ . Ce résultat s'écrit  $\lambda\lambda' = 1$ . De même,  $\mu\mu' = 1$  et  $\nu\nu' = 1$  et la vérification de (II).

Avec U en G, isobarycentre,  $D_1$  est parallèle à BC : P et P' sont symétriques par rapport au milieu de BC. Les couples  $(AP,AP')$ ,  $(BQ,BQ')$  et  $(CR,CR')$  sont isotomiques.

Avec U en  $\Omega$ , centre du cercle inscrit,  $D_1$  est la bissectrice extérieure de

(AB,AC) : AP et AP' admettent comme bissectrices  $A\Omega$  et  $D_1$ . Les couples (AP,AP'), (BQ,BQ') et (CR,CR') sont isogonaux.

## AUTRES SOLUTIONS

Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Jacques DAUTREVAUX (06 - St André), Edgard DELPLANCHE (94 - Créteil), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille), René MANZONI (76 - Le Havre), Charles NOTARI (31 - Montaut), Raymond RAYNAUD (04 - Digne), Pierre RENFER (67 - Ostwald).

## COMPLÉMENTS de l'auteur

1) Les propriétés énoncées (sauf le passage de  $MM'$  par le point de concours de  $\Pi'$ ,  $JJ'$  et  $KK'$ ) résultent du *théorème de Brianchon*.

Étant données six droites  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  et  $D_6$ , on considère les trois droites joignant respectivement les points :  $D_1 \cap D_2$  et  $D_4 \cap D_5$  ;  $D_2 \cap D_3$  et  $D_5 \cap D_6$  ;  $D_3 \cap D_4$  et  $D_6 \cap D_1$ . Le théorème de Brianchon affirme que la concourance de ces trois droites est équivalente à la tangence des six  $D_i$  à une même conique. Notons qu'étant données six droites dont l'une est arbitrairement notée  $D_1$ , il y a 120 choix possibles pour obtenir l'ordre ci-dessus ; mais le remplacement d'un ordre par l'ordre inverse ne change pas les trois droites considérées. On est ainsi conduit à 60 triplets de droites concourantes. La constatation d'une concourance permet d'affirmer la tangence des six droites à une même conique, ce qui entraîne les 59 autres !

On obtient la propriété ( $\Pi$ ) en choisissant l'ordre AP, AP', CR, CR', BQ, BQ' conduisant aux points d'intersection A, J, C, I, B, K. Elle exprime donc que ces six droites sont tangentes à une même conique, et on en déduit les propriétés de concourance demandées (sauf celle concernant  $MM'$ ) par des choix d'ordre différents. En considérant celles se déduisant de la concourance de JK, J'K', BC, par permutation, on obtient ainsi six concourances. Mais, les notations P et P' étant arbitrairement choisies, on peut permuter Q et Q', R et R' ou les deux. On aboutit à 24 concourances. Ce qui précède montre qu'il y en a encore 36 autres !

2) Mais il est intéressant de remarquer que l'établissement de la relation  $\lambda\lambda'\mu\mu'\nu\nu' = 1$  constitue, à l'inverse, une démonstration du théorème de Brianchon.

Considérons l'équation tangentielle générale d'une conique dans un repère projectif de triangle de base ABC :  $au^2+bv^2+cw^2+dvw+ewu+fuv = 0$ .

La droite  $z = \lambda y$  est caractérisée par  $u = 0, v + \lambda w = 0$ . La tangence à  $z = \lambda y$  et  $z = \lambda' y$  se traduit par l'identification de  $bv^2 + cw^2 + dvw = 0$  à  $(v + \lambda w)(v + \lambda' w) = 0$ . On en déduit  $c = \lambda \lambda' b, d = (\lambda + \lambda')b$ . Nous obtenons de même pour les tangences à  $x = \mu z, x = \mu' z, y = vx, y = v'x : a = \mu \mu' c, e = (\mu + \mu')c, b = v v', f = (v + v')a$ . Les coefficients  $a, b$  et  $c$  sont définis à un facteur près si et seulement si  $\lambda \lambda' \mu \mu' v v' = 1 ; d, e$  et  $f$  sont alors déterminés.

Nous obtenons ainsi, par le calcul, l'équivalence de (II) et de la tangence de la conique aux six droites. Étant données six droites arbitraires, l'application des notations vues en 1) permet de les considérer comme les droites AP, AP', BQ, BQ', CR et CR'. Il en résulte la démonstration pour ces six droites du théorème de Brianchon.

3) AI, BJ et CK concourant en M, AI', BJ' et CK' en M', II', JJ' et KK' en N, nous obtenons en plus l'alignement de  $\bar{M}, M'$  et N. Les 60 triplets de droites concourantes se groupent ainsi trois par trois pour conduire à trois points d'intersection alignés. Nous mettons donc en évidence 20 triplets de trois points alignés.

4) Il y a équivalence entre la propriété (II) et l'appartenance des six points P, P', Q, Q', R et R' à une même conique.

Considérons en effet maintenant dans le même repère l'équation ponctuelle générale d'une conique :  $ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + ezx + fxy = 0$ . Des ensembles de coordonnées de P et P' sont :  $(0, 1, \lambda)$  et  $(0, 1, \lambda')$ . Les points d'intersection de la conique avec la droite BC d'équation  $x = 0$  sont définis par :  $by^2 + cz^2 + dyz = 0$ . Le passage de la conique par P et P' se traduit donc par le fait que l'équation  $c(z/y)^2 + d(y/z) + b = 0$  admet comme racines  $\lambda$  et  $\lambda'$  : d'où  $\lambda \lambda' = b/c$  et  $\lambda + \lambda' = -d/c$ . Nous écrivons de même les passages par Q, Q', R, R' et un raisonnement analogue à celui de 2) donne l'équivalence à la condition  $\lambda \lambda' \mu \mu' v v' = 1$ .

La dualité intervertissant points et droites, alignements de points et concourances de droites, tout en faisant passer d'une conique ensemble de points à une conique enveloppe de droites, fait passer du théorème de Brianchon au théorème de Pascal, que l'on peut donc appliquer ici. Si la propriété (II) est vérifiée, on obtient ainsi, à partir de P, P', Q, Q', R et R', 60 triplets de points alignés, les droites passant par ces points se groupant trois par trois en 20 triplets de droites concourantes. On reste confondu devant la richesse de la figure !

5) J'ai découvert la propriété (II) dans le cas des isogonalités (U au centre du cercle inscrit) pour appliquer la concourance de II', JJ' et KK' à une démonstration du théorème de Morley (voir livre de Viricel). La propriété (II) est signalée dans *La Géométrie du triangle* de Lalesco dans le cas de

AP, BQ, CR, d'une part, et de AP', BQ', CR', d'autre part, concourantes. Il en est résulté cette étude générale.

**AUTRES REMARQUES de François LO JACOMO**

Quel rôle jouent véritablement les points P, P', Q, Q', R et R' dans la propriété démontrée, hormis le fait qu'ils sont sur une même conique ? Si l'on fait abstraction de ces points, on peut énoncer ainsi le résultat :

Soient deux triplets de droites (D<sub>1</sub>, D<sub>2</sub>, D<sub>3</sub>) et (D'<sub>1</sub>, D'<sub>2</sub>, D'<sub>3</sub>). Disposons en matrice les neuf points d'intersection D<sub>i</sub> ∩ D'<sub>j</sub> de sorte que les points d'une même droite D<sub>i</sub> soient sur la même diagonale descendante de la matrice et les trois points d'une même droite D'<sub>j</sub> sur une même diagonale montante de la matrice :

$$\begin{pmatrix} D_1 \cap D'_1 & D_3 \cap D'_2 & D_2 \cap D'_3 \\ D_2 \cap D'_2 & D_1 \cap D'_3 & D_3 \cap D'_1 \\ D_3 \cap D'_3 & D_2 \cap D'_1 & D_1 \cap D'_2 \end{pmatrix}$$

Dans le cas de cet énoncé, D<sub>1</sub> = AP, D<sub>2</sub> = BQ, D<sub>3</sub> = CR, D'<sub>1</sub> = AP', D'<sub>2</sub> = BQ', D'<sub>3</sub> = CR' et la matrice de points est donc :

$$\begin{pmatrix} A & I' & I \\ B & J' & J \\ C & K' & K \end{pmatrix}$$

Les trois colonnes de la matrice définissent trois triangles T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub> et T<sub>3</sub> et les trois lignes de la matrice trois autres triangles T'<sub>1</sub>, T'<sub>2</sub> et T'<sub>3</sub>.

Les triangles T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub> et T<sub>3</sub> sont homologues ou si deux des triangles T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub> et T<sub>3</sub> sont homologues, alors les six droites D<sub>1</sub>, D<sub>2</sub>, D<sub>3</sub>, D'<sub>1</sub>, D'<sub>2</sub>, D'<sub>3</sub> sont tangentes à une même conique.

Si les six droites sont tangentes à une même conique, alors les trois triangles T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub> et T<sub>3</sub> sont deux à deux homologues de même axe Δ, les trois triangles T'<sub>1</sub>, T'<sub>2</sub>, T'<sub>3</sub> sont deux à deux homologues de même axe Δ', les pôles de ces trois premières homologues T<sub>1</sub> → T<sub>2</sub>, T<sub>2</sub> → T<sub>3</sub>, T<sub>3</sub> → T<sub>1</sub> appartiennent au second axe Δ et les pôles des trois autres homologues T'<sub>1</sub> → T'<sub>2</sub>, T'<sub>2</sub> → T'<sub>3</sub>, T'<sub>3</sub> → T'<sub>1</sub> appartiennent au premier axe Δ'.

Dans le cas de l'énoncé 257, l'hypothèse (II) était que T<sub>1</sub> et T<sub>3</sub> sont homologues de pôle N; on en déduisait successivement que T<sub>1</sub> et T<sub>2</sub> sont homologues de pôle M', que T'<sub>2</sub> et T'<sub>3</sub> sont homologues et que T<sub>2</sub> et T<sub>3</sub> sont homologues de pôle N.

Si les triangles T<sub>1</sub> et T<sub>3</sub> sont homologues de pôle N situé sur MM' = Δ. Mais, d'une part étant données six tangentes à une même conique, il exis-

te dix manières de les grouper trois par trois, d'où les nombreux alignements et concourances mis en évidence (peut-on dire quelque chose des dix intersections  $\Delta \cap \Delta'$  ?).

D'autre part, la figure fait apparaître bien d'autres homologues, donc bien d'autres matrices de neuf points et bien d'autres sextuplets de droites. L'homologie de BJK' et CKJ' utilisée par Jacques Bouteloup et Edgard Delplanche donne pour matrices de points :

$$\begin{pmatrix} B & J & K' \\ C & K & J' \\ N & M' & I \end{pmatrix}$$

avec toutes les propriétés associées. Alors que, pour la même question, Raymond Raynaud et Marguerite Ponchaux utilisent l'homologie de centre A, d'axe BC qui transforme J en K' et donc K en J' et M en I : ceci donne une autre matrice de neuf points :

$$\begin{pmatrix} J & K & M \\ K' & J' & I \\ KI \cap J'M & MK' \cap IJ & N \end{pmatrix}$$

donc deux nouveaux points et quatre nouvelles droites, et ainsi de suite...

### ÉNONCÉ 258 (Marie-Louise CHAILLOUT, 95 - Sarcelles)

Quel est le nombre de colliers différents, sans fermeture visible, que l'on peut obtenir en enfilant  $(n + 6)$  perles sphériques, indiscernables au toucher, parmi lesquelles  $n$  sont blanches et 6 noires ?

### SOLUTION de Pierre RENFER (67 - OSTWALD)

#### 1) Théorème de Burnside-Frobenius

Soit  $G$  un groupe fini, opérant sur un ensemble fini  $E$ . Soit  $\Omega$  l'ensemble des orbites. Pour tout élément  $\sigma$  de  $G$ , on pose  $A_\sigma = \{x \in E | \sigma \cdot x = x\}$ . Alors

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{\sigma \in G} \text{Card}(A_\sigma)$$

*Démonstration.*

a) Rappelons que, pour tout élément  $x$  de  $E$ ,

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(\omega(x)) \times \text{Card}(S(x))$$

où  $\omega(x)$  désigne l'orbite de  $x$  et  $S(x)$  le stabilisateur de  $x$ .

En effet, pour un élément  $y$  de  $\omega(x)$ , soit  $C_y = \{\sigma \in G \mid \sigma \cdot x = y\}$ . Si  $\tau$  est un élément particulier de  $C_y$ , on peut définir la bijection : 
$$C_y \rightarrow S(x) \\ \sigma \mapsto \tau^{-1} \sigma$$

Donc  $\text{Card}(C_y) = \text{Card}(S(x))$  et

$$\text{Card}(G) = \sum_{y \in \omega(x)} \text{Card}(C_y) = \sum_{y \in \omega(x)} \text{Card}(S(x)) = \text{Card}(\omega(x)) \times \text{Card}(S(x))$$

b) Posons  $U = \{(\sigma, x) \in G \times E \mid \sigma \cdot x = x\}$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{Card}(U) &= \sum_{\sigma \in G} \text{Card}(A_\sigma) = \sum_{x \in E} \text{Card}(S(x)) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \text{Card}(S(x)) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(\omega)} = \sum_{\omega \in \Omega} \text{Card}(G) = \text{Card}(\Omega) \times \text{Card}(G) \end{aligned}$$

## 2) Application au problème du collier

Si l'on interdit de tourner et de retourner le collier, le problème est facile. Soit  $P$  un polygone régulier à  $(n+6)$  sommets. Le nombre de façons de choisir les six sommets noirs de  $P$  est  $C_{n+6}^6$ . Soit  $E$  l'ensemble de ces configurations. La difficulté consiste à identifier les configurations de  $E$  qui se correspondent par une isométrie du polygone  $P$ . Le nombre de colliers est le nombre d'orbites, obtenues par l'opération sur l'ensemble  $E$  du groupe diédral  $G$  des isométries de  $P$ . Le groupe  $G$  contient  $(n+6)$  rotations et  $(n+6)$  symétries axiales. Si une rotation conserve une configuration de  $E$ , elle conserve en particulier l'hexagone des sommets noirs : l'ordre de cette rotation doit donc diviser 6. Quatre cas se présentent :

### a) Premier cas : l'entier $n$ n'est divisible ni par 2, ni par 3.

Pour toute rotation  $\sigma$  distincte de l'identité,  $\text{Card}(A_\sigma) = 0$ . Si  $\sigma = \text{Id}$ ,  $\text{Card}(A_{\text{Id}}) = \text{Card}(E) = C_{n+6}^6$ .

Pour toute symétrie axiale  $\sigma$  de  $G$ , l'axe  $D$  passe par un seul point de  $P$ . Ce point doit être blanc pour une configuration de  $E$  conservée par  $\sigma$ . Les autres points forment  $\frac{n+5}{2}$  paires de points symétriques par rapport à  $D$ . Il s'agit de choisir trois paires noires pour une configuration de  $E$  conservée par

$$\sigma. \text{ Donc Card}(A_\sigma) = \frac{C_{n+5}^3}{2}$$

La formule de Burnside-Frobenius donne :

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2(n+6)} \left( C_{n+6}^6 + (n+6)C_{\frac{n+5}{2}}^3 \right) = \frac{1}{12} C_{n+5}^5 + \frac{1}{2} C_{\frac{n+5}{2}}^3$$

**b) Deuxième cas : l'entier est divisible par 2, mais non divisible par 3.**

Pour toute rotation  $\sigma$  distincte de l'identité et du demi-tour,  $\text{Card}(A_\sigma) = 0$ . Si  $\sigma = \text{Id}$ ,  $\text{Card}(A_{\text{Id}}) = \text{Card}(E) = C_{n+6}^6$ .

Si  $\sigma$  est le demi-tour, on obtient une configuration de E conservée par  $\sigma$  en choisissant trois paires de points noirs parmi les  $\frac{n+6}{2}$  paires contenant deux points diamétralement opposés. Donc  $\text{Card}(A_\sigma) = \frac{C_{n+6}^3}{2}$ .

Les symétries axiales  $\sigma$  de G se répartissent de façons égales en deux catégories : l'axe D passe par deux points de P ou ne passe par aucun point de P.

Si  $\sigma$  appartient à la première catégorie, on obtient une configuration de E conservée par  $\sigma$ , soit en noircissant les deux points de D et en choisissant deux paires de points noirs parmi les paires contenant deux points symétriques par rapport à D, soit en blanchissant les deux points de D et en choisissant trois paires de points noirs parmi les paires contenant deux points symétriques par rapport à D. Donc  $\text{Card}(A_\sigma) = \frac{C_{n+4}^2}{2} + \frac{C_{n+4}^3}{2} = \frac{C_{n+6}^3}{2}$ .

Si  $\sigma$  appartient à la deuxième catégorie, on obtient une configuration de E conservée par  $\sigma$  en choisissant trois paires de points noirs parmi les paires contenant deux points symétriques par rapport à D. Donc  $\text{Card}(A_\sigma) = \frac{C_{n+6}^3}{2}$ .

La formule de Burnside-Frobenius donne :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\Omega) &= \frac{1}{2(n+6)} \left( C_{n+6}^6 + C_{\frac{n+6}{2}}^3 + (n+6)C_{\frac{n+6}{2}}^3 \right) \\ &= \frac{1}{12} C_{n+5}^5 + \frac{1}{12} C_{\frac{n+4}{2}}^2 + \frac{1}{2} C_{\frac{n+6}{2}}^3 = \frac{1}{12} C_{n+5}^5 + \frac{1}{2} C_{\frac{n+6}{2}}^3 + \frac{1}{12} C_{\frac{n+4}{2}}^2 \end{aligned}$$

**c) Troisième cas : l'entier  $n$  est divisible par 3, mais non divisible par 2.**

Pour toute rotation  $\sigma$  distincte de l'identité et des tiers de tour,  $\text{Card}(A_\sigma) = 0$ . Si  $\sigma = \text{Id}$ ,  $\text{Card}(A_{\text{Id}}) = \text{Card}(E) = C_{n+6}^6$ .

Si  $\sigma$  est l'un des deux tiers de tour, on obtient une configuration de  $E$  conservée par  $\sigma$  en choisissant deux triangles équilatéraux de points noirs parmi les  $\frac{n+6}{3}$  triangles équilatéraux inscrits dans  $P$ . Donc  $\text{Card}(A_\sigma) = C_{\frac{n+6}{3}}^2$ .

Pour les symétries axiales, l'étude est la même que dans le premier cas. La formule de Burnside-Frobenius donne :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\Omega) &= \frac{1}{2(n+6)} \left( C_{n+6}^6 + 2C_{\frac{n+6}{3}}^2 + (n+6)C_{\frac{n+6}{2}}^3 \right) \\ &= \frac{1}{12}C_{n+6}^6 + \frac{n+3}{18} + \frac{1}{2}C_{\frac{n+6}{2}}^3 = \frac{1}{12}C_{n+6}^6 + \frac{1}{2}C_{\frac{n+6}{2}}^3 + \frac{n}{18} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

**d) Quatrième cas : l'entier  $n$  est divisible par 6.**

Pour toute rotation  $\sigma$  dont l'ordre ne divise pas 6,  $\text{Card}(A_\sigma) = 0$ . Si  $\sigma = \text{Id}$ ,  $\text{Card}(A_{\text{Id}}) = \text{Card}(E) = C_{n+6}^6$ .

$\text{Card}(A_\sigma) = C_{\frac{n+6}{2}}^3$ .

Si  $\sigma$  est l'un des deux tiers de tour,  $\text{Card}(A_\sigma) = C_{\frac{n+6}{3}}^2$ .

Si  $\sigma$  est l'un des deux axes de tour, on obtient une configuration de  $E$  conservée par  $\sigma$  en choisissant un hexagone régulier de points noirs parmi les  $\frac{n+6}{6}$  hexagones réguliers inscrits dans  $P$ . Donc  $\text{Card}(A_\sigma) = \frac{n+6}{6}$ .

Si  $\sigma$  est une symétrie axiale,  $\text{Card}(A_\sigma) = C_{\frac{n+6}{2}}^3$ .

La formule de Burnside-Frobenius donne :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\Omega) &= \frac{1}{2(n+6)} \left( C_{n+6}^6 + C_{\frac{n+6}{2}}^3 + 2C_{\frac{n+6}{3}}^2 + 2\frac{n+6}{6} + (n+6)C_{\frac{n+6}{2}}^3 \right) \\ &= \frac{1}{12} C_{n+5}^5 + \frac{1}{12} C_{\frac{n+4}{2}}^2 + \frac{n+3}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} C_{\frac{n+6}{2}}^3 \\ &= \frac{1}{12} C_{n+5}^5 + \frac{1}{2} C_{\frac{n+6}{2}}^3 + \frac{1}{12} C_{\frac{n+4}{2}}^2 + \frac{n}{18} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

## AUTRES SOLUTIONS

Gabriel FRAISSE (11 - Ferrals les Corbières), Joël PAYEN (93 - Blanc Mesnil), Marguerite PONCHAUX (59 - Lille) et quatre solutions incomplètes ou fausses.

## REMARQUES

Marguerite Ponchaux signale que ce problème est traité dans : Louis COMTET, *Analyse Combinatoire*, tome 2, p. 105, exercice 18, en application d'un théorème de Polya.

Par ailleurs, Pierre Renfer généralise le problème au nombre de colliers comportant  $a$  perles noires et  $b$  perles blanches.

Le groupe  $G$  est le groupe diédral d'un polygone régulier à  $(a+b)$  sommets. Les rotations  $\sigma$  de  $G$ , pour lesquelles  $A_\sigma$  est non vide, ont un ordre  $d$ , diviseur de  $c = \text{PGCD}(a, b)$ .

Pour obtenir une configuration de  $E$  conservée par une telle rotation, il s'agit de choisir  $\frac{a}{d}$  polygones réguliers à  $d$  sommets noirs parmi les  $\frac{a+b}{d}$

polygones à  $d$  sommets inscrits dans  $P$ . Donc  $\text{Card}(A_\sigma) = C_{\frac{a+b}{d}}^{\frac{a}{d}}$ .

Le nombre de rotations d'ordre  $d$  de  $G$  est  $\varphi(d)$  (la fonction  $\varphi$  étant l'indicateur d'Euler). Pour les symétries axiales de  $G$ , il convient de distinguer trois cas :

**a) Premier cas : les entiers  $a$  et  $b$  sont pairs.**

Les symétries axiales  $\sigma$  de  $G$  se répartissent de façons égales en deux catégories : l'axe  $D$  passe par deux points de  $P$  ou ne passe par aucun point de  $P$ .

Si  $\sigma$  appartient à la première catégorie, on obtient une configuration de  $E$  conservée par  $\sigma$  soit en noircissant les deux points de  $D$  et en choisissant  $\frac{a-2}{2}$  paires de points noirs parmi les  $\frac{a+b-2}{2}$  paires contenant deux points symétriques par rapport à  $D$ , soit en blanchissant les deux points de  $D$  et en choisissant  $\frac{a}{2}$  paires de points noirs parmi les  $\frac{a+b-2}{2}$  paires contenant deux points symétriques par rapport à  $D$ . Donc

$$\text{Card}(A_\sigma) = C_{\frac{a-2}{2}}^{\frac{a+b-2}{2}} + C_{\frac{a}{2}}^{\frac{a+b-2}{2}} = C_{\frac{a}{2}}^{\frac{a+b}{2}}$$

Si  $\sigma$  appartient à la deuxième catégorie, on obtient une configuration de  $E$  conservée par  $\sigma$  en choisissant  $\frac{a}{2}$  paires de points noirs parmi les  $\frac{a+b}{2}$  paires symétriques par rapport à  $D$ . Donc

$$\text{Card}(A_\sigma) = C_{\frac{a}{2}}^{\frac{a+b}{2}}$$

La formule de Burnside-Frobenius donne :

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{(a+b)} \left( \sum_{d|c} \varphi(d) C_{\frac{a}{d}}^{\frac{a}{d}} + (a+b) C_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \right)$$

**Deuxième cas : l'entier  $a$  est pair et l'entier  $b$  impair.**

L'axe  $D$  d'une symétrie axiale  $\sigma$  de  $G$  passe par un seul point de  $P$ . On

obtient une configuration de E conservée par  $\sigma$  en blanchissant le point de D et en choisissant  $\frac{a}{2}$  paires de points noirs parmi les  $\frac{a+b-1}{2}$  paires contenant deux points symétriques par rapport à D. Donc

$$\text{Card}(A_\sigma) = C_{\frac{a+b-1}{2}}^{\frac{a}{2}}.$$

La formule de Burnside-Frobenius donne :

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2(a+b)} \left( \sum_{d|c} \varphi(d) C_{\frac{a+b}{d}}^{\frac{a}{d}} + (a+b) C_{\frac{a+b-1}{2}}^{\frac{a}{2}} \right).$$

**c) Troisième cas : les entiers  $a$  et  $b$  sont impairs.**

Les seules symétries axiales  $\sigma$  de G pour lesquelles  $A_\sigma$  est non vide, sont celles dont l'axe D passe par deux points de P (un noir et un blanc).

On obtient une configuration de E conservée par une telle symétrie  $\sigma$  en choisissant encore  $\frac{a-1}{2}$  paires de points noirs parmi les  $\frac{a+b-2}{2}$  paires contenant deux points symétriques par rapport à D. Donc

$$\text{Card}(A_\sigma) = C_{\frac{a+b-2}{2}}^{\frac{a-1}{2}}.$$

La formule de Burnside-Frobenius donne :

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2(a+b)} \left( \sum_{d|c} \varphi(d) C_{\frac{a+b}{d}}^{\frac{a}{d}} + (a+b) C_{\frac{a+b-2}{2}}^{\frac{a-1}{2}} \right)$$

On obtient donc dans tous les cas la formule :

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{2(a+b)} \left( \sum_{d|c} \varphi(d) C_{\frac{a+b}{d}}^{\frac{a}{d}} + (a+b) C_{\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor}^{\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor} \right)$$

**ÉNONCÉ 259 (M. LAFOND, 21 - Dijon)**

Étant donnés  $2n - 1$  entiers quelconques, montrer qu'on peut en extraire  $n$  dont la somme soit un multiple de  $n$ .

**SOLUTION**

Outre la solution de l'auteur, je n'ai reçu que deux réponses à ce problème, de René MANZONI (76 - Le Havre) et Charles NOTARI (31 - Montaut), mais après avoir lu ces trois démonstrations, je me suis efforcé d'en construire une partiellement personnelle et plus élémentaire.

La première idée, utilisée par l'auteur du problème, est le :

LEMME 1. La propriété à démontrer est *multiplicative* : si elle est vraie pour  $n = a$  et pour  $n = b$ , elle est vraie pour  $n = ab$ .

Appelons  $E_1$  notre ensemble de  $2n - 1$  entiers quelconques pour  $n = ab$ . On peut évidemment supposer  $a \geq 2$  et  $b \geq 2$ . Comme  $2ab - 1 \geq 2a - 1$ , on peut, par hypothèse, extraire de  $E_1$  un sous-ensemble  $A_1$  de  $a$  entiers dont la somme soit multiple de  $a$  : appelons  $k_1a$  cette somme et  $E_2 = E_1 \setminus A_1$  le complémentaire de  $A_1$  dans  $E_1$ .  $E_2$  contient  $(2b - 1)a - 1 \geq 2a - 1$  entiers ; on peut donc en extraire un sous-ensemble  $A_2$  de  $a$  entiers dont la somme soit un multiple de  $a$  : appelons  $k_2a$  cette somme et  $E_3 = E_2 \setminus A_2$  le complémentaire de  $A_2$  dans  $E_2$ .

Réitérons ce processus jusqu'à  $E_{2b-1}$ , qui contient  $2a - 1$  entiers et dont on peut encore extraire un ensemble  $A_{2b-1}$  de  $a$  entiers de somme  $k_{2b-1}a$ .

$\{k_1, k_2, \dots, k_{2b-1}\}$  est un ensemble de  $2b - 1$  entiers ; on peut donc en extraire  $b$  entiers  $k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_b}$  de somme multiple de  $b$  : les  $ab$  entiers de

$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_b}$  ont pour somme  $(k_{i_1} + k_{i_2} + \dots + k_{i_b})a$ , qui est manifestement un multiple de  $ab$ .

Dès lors, il suffit de démontrer la propriété lorsque  $n$  est premier : il en résultera qu'elle est vraie pour tout  $n$ . Or, si  $n$  est premier, le corps  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , que nous appellerons désormais  $\mathbf{Z}_n$ , n'admet pas de sous-groupe propre. Il n'admet donc pas de sous-ensemble propre invariant par translation. Autrement dit :

LEMME 2. Si  $X$  est un sous-ensemble de  $\mathbf{Z}_n$  et si  $d$  est un élément non nul quelconque de  $\mathbf{Z}_n$ ,  $X + \{d\} = X \Rightarrow X = \mathbf{Z}_n$ , en notant classiquement, pour deux sous-ensembles  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{Z}_n$ ,

$$X + Y = \{z \in \mathbf{Z}_n \mid \exists x \in X, \exists y \in Y, z = x + y\}$$

La démonstration de ce lemme est très simple : si  $X + \{d\} = X$ , alors  $X + \{2d\} = X$  et, plus généralement,  $X + \{kd\} = X$  pour tout  $k$ . Donc  $X + \{0, d, 2d, \dots, (n-1)d\} = X$ . Or, pour tout  $d$  non nul,  $\{0, d, \dots, (n-1)d\} = \mathbf{Z}_n$  et  $X + \mathbf{Z}_n$  ne peut être égal qu'à  $\mathbf{Z}_n$ .

En notant, désormais,  $|X|$  le cardinal de  $X$ , on en déduit le troisième lemme que voici :

LEMME 3. Si  $|X| < n$  et si  $a$  et  $b$  sont deux éléments distincts de  $\mathbf{Z}_n$ ,

$$|X + \{a, b\}| > |X|$$

En effet,  $X + \{a, b\} = (X + \{a\}) \cup (X + \{b\})$ , chacun des ensembles  $X + \{a\}$  et  $X + \{b\}$  contient  $|X|$  éléments et ces deux ensembles sont distincts puisqu'ils se déduisent l'un de l'autre par une translation de  $d = b - a$ .

L'auteur a généralisé le résultat ci-dessus en montrant que, pour deux sous-ensembles  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{Z}_n$ ,  $|X + Y| \geq \min(|X| + |Y| - 1, n)$ , mais cette généralisation n'est pas nécessaire grâce au :

LEMME 4. Pour tout entier  $n$ , premier ou non premier, dans tout ensemble  $E$  de  $2n - 1$  entiers quelconques, on peut :

- soit trouver  $n$  entiers  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tels que  $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_n \pmod{n}$ ,
- soit trouver une partition  $E = \{c_1\} \cup \{a_2, b_2\} \cup \dots \cup \{a_n, b_n\}$  telle que  $\forall i \in \{2, \dots, n\}, a_i \not\equiv b_i \pmod{n}$ .

$c_1$  peut même être choisi arbitrairement et, pour le reste, on démontre par récurrence sur  $k$  que, si  $E_k$  est un sous-ensemble de  $2k$  éléments et si  $R$  est une relation d'équivalence sur  $E_k$  telle qu'aucune classe ne contienne plus de  $k$  éléments,  $E_k$  peut être partitionné en  $k$  paires  $\{x_k, y_k\}$  d'éléments non équivalents par  $R$ . C'est évident pour  $k = 1$  ; pour  $k > 1$ , prenons  $x_k$  et  $y_k$  dans les deux classes contenant le plus d'éléments : chacune d'elles contient au plus  $k$  éléments et aucune autre classe ne contient  $k$  éléments de sorte que, dans

l'ensemble  $E_{k-1} = E_k \setminus \{x_k, y_k\}$  qui contient  $2k - 2$  éléments, aucune classe ne contient plus de  $k - 1$  éléments, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Ceci fournit même un algorithme très simple pour construire explicitement ladite partition.

Dans le premier cas, le problème est résolu :  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  est divisible par  $n$ .

Dans le second cas où notre ensemble  $E$  de  $2n - 1$  entiers peut être partitionné, appelons  $\overline{c_1}$ ,  $\overline{a_i}$  et  $\overline{b_i}$  les classes de  $c_1$ ,  $a_i$  et  $b_i$  dans  $\mathbf{Z}_n$ . D'après le lemme 3, pour tout  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ ,

$$\text{- soit } \{\overline{c_1}\} + \{\overline{a_2}, \overline{b_2}\} + \dots + \{\overline{a_k}, \overline{b_k}\} = \mathbf{Z}_n,$$

$$\text{- soit } \left| \{\overline{c_1}\} + \dots + \{\overline{a_{k+1}}, \overline{b_{k+1}}\} \right| > \left| \{\overline{c_1}\} + \dots + \{\overline{a_k}, \overline{b_k}\} \right|.$$

Comme  $\left| \{\overline{c_1}\} + \{\overline{a_2}, \overline{b_2}\} \right| = 2$ , on en déduit par récurrence que  $\left| \{\overline{c_1}\} + \dots + \{\overline{a_k}, \overline{b_k}\} \right| \geq k$  quel que soit  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ . En particulier, pour  $k = n$ ,  $\{\overline{c_1}\} + \{\overline{a_2}, \overline{b_2}\} + \dots + \{\overline{a_n}, \overline{b_n}\} = \mathbf{Z}_n$ . Tout élément de  $\mathbf{Z}_n$ , par exemple 0, est somme de  $\overline{c_1}$ , d'un élément  $\overline{c_2} \in \{\overline{a_2}, \overline{b_2}\}$ , d'un élément  $\overline{c_3} \in \{\overline{a_3}, \overline{b_3}\}$ , etc., ce qui signifie précisément que  $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ , somme de  $n$  entiers de  $E$ , est multiple de  $n$ .

Ceci achève la démonstration. On notera que le résultat ne peut guère être amélioré : si tous les  $2n - 1$  entiers de  $E$  sont congrus à 1 modulo  $n$ , n'importe quelle somme de  $n$  entiers de  $E$  est divisible par  $n$ , mais une somme de moins de  $n$  entiers de  $E$  n'est jamais divisible par  $n$ . Si, maintenant,  $E$  contient  $n$  entiers congrus à 1 modulo  $n$ , les  $n - 1$  restants étant congrus à 2 modulo  $n$ , une seule somme de  $n$  entiers est divisible par  $n$ , mais il existe des sommes de moins de  $n$  entiers qui sont divisibles par  $n$ .

On peut néanmoins affirmer que, parmi  $2n - 1$  entiers quelconques, il existe toujours au moins deux sous-ensembles distincts d'au plus  $n$  entiers dont la somme est multiple de  $n$ , car si  $E$  peut être partitionné, le choix de  $c_1$  est arbitraire ; en choisissant  $c_1$  parmi les entiers n'appartenant pas au premier sous-ensemble, on obtient un sous-ensemble distinct.