

Les coniques et Cabri-Géomètre

Une expérimentation à Sao Paulo

Saddo Ag Almouloud
Vincenzo Bongiovanni
Tânia Mendonça Campos (*)

I - Introduction

Dans l'étude des coniques comme lieux géométriques, les élèves ont de réelles difficultés à imaginer la trace d'un point soumis à certaines contraintes mathématiques.

À la suite de l'enseignement des coniques, généralement proposé, les élèves ne semblent retenir que la forme des courbes étudiées et oublient les propriétés géométriques et analytiques qui les définissent. L'une des raisons de ce fait est la disparition de la notion de lieu géométrique dans les manuels scolaires brésiliens. Son étude se fait de façon implicite sans mise en relation avec ses différents registres de représentation.

Ces constats nous ont conduit à construire et à expérimenter quelques situations de lieu géométrique (parabole, hyperbole et ellipse) pour des élèves du 2^e degré (niveau lycée) et des étudiants de 3^e degré (niveau 1^{er} année Deug).

(*) *Pontificia Universidade Catolica de São Paulo, rua Marquês de Paranagua, 111, 01303-050 - São Paulo - SP - Brésil.*

L'outil principal de l'expérimentation est le logiciel Cabri-Géomètre.

II - Une brève étude historique et épistémologique à propos des coniques

On situe l'apparition de l'étude des coniques en Grèce vers l'an 350 avant J.C. On attribue à Ménechme, disciple d'Eudoxe, la découverte de ces nouveaux objets mathématiques. Ménechme définit les coniques comme l'intersection d'un cône et d'un plan perpendiculaire à sa génératrice. L'ellipse, la parabole et l'hyperbole sont obtenues comme les sections de trois types de cône circulaire droit, suivant que l'angle au sommet du cône est aigu, droit ou obtus.

Apollonius définit les coniques comme l'intersection d'un cône et d'un plan qui intercepte la génératrice, sans nécessairement être les sections perpendiculaires à la génératrice du cône. Il obtient ainsi à partir d'un cône unique les trois coniques en faisant varier l'inclinaison du plan de la section. Il démontre finalement que le cône choisi peut être quelconque.

Vers 320 après JC, Pappus, dans le livre « La collection » (cf. bibliographie [15] et [16]), énonce les propriétés du foyer et de la directrice des trois coniques. Il caractérise une conique de la façon suivante (en formalisme actuel) : « Soient d une droite et F un point n'appartenant pas à cette droite. On considère dans le plan (d, F) le point P et les segments PF et PA où A est

le projeté orthogonal de P sur la droite d . Si le quotient $\frac{PF}{PA}$ est constant, le

point P décrit une conique. De plus, si cette constante est supérieure à 1, alors la conique est une hyperbole, si elle est égale 1, nous avons une parabole et si elle est inférieure à 1, la conique est une ellipse ».

Au 9^e siècle, Mohammed, fils de Moussa Ibn Shakir, étudie l'ellipse à partir de ses propriétés focales.

Guidobaldo del Monte, en 1579, définit l'ellipse comme le lieu géométrique des points d'un plan dont la somme des distances aux foyers est constante.

Jan De Witt (1629-1672) présente des définitions cinématiques pour les sections des cônes. Entre ces définitions, l'auteur présente celles s'appuyant sur les notions de foyer et de directrice.

Fermat (1601-1665) définit les coniques à partir de trois équations, que nous pouvons écrire de nos jours sous la forme suivante : $x^2 = ay$, $k^2 - x^2 = ay^2$ et $k^2 + x^2 = ay^2$

Philippe de La Hire (1640-1718) définit l'ellipse et l'hyperbole en termes de somme et de différence par rapport aux foyers, et la parabole comme l'ensemble des points qui sont à égale distance du foyer et de la directrice. Ces trois coniques sont définies comme trois courbes distinctes et leur étude est faite en fonction des propriétés particulières de chacune.

Euler (1707-1783) définit la conique comme la courbe d'équation cartésienne $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Leconte Th., en 1935 (dans son œuvre « L'Enseignement scientifique », n° 76, pages 162-176), propose une nouvelle définition des coniques. L'ellipse est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par un point fixe et sont tangents intérieurement à un cercle donné. L'hyperbole est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui sont tangents extérieurement à un cercle donné. Une parabole est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui sont tangents à une droite donnée. Si nous considérons la droite comme un cercle de rayon infini, on peut donner une seule définition aux trois coniques : « C'est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui sont tangents à un cercle donné ».

Cette brève étude historique et épistémologique met en évidence les différentes approches mises en œuvre pour étudier les coniques. Les différents points de vue mettent en jeu soit le cadre géométrique, soit le cadre de la géométrie analytique. Mais, l'enseignement au Brésil, en général, ne prend pas en compte les différentes conceptions sur les coniques que véhiculent ces différentes approches.

III - Hypothèses théoriques et choix didactiques

En général, les coniques sont enseignées au Brésil en terminale de lycée (élève de 17 ans). Mais ces notions ne sont abordées, en particulier, que dans les lycées privés. Dans la majorité des manuels brésiliens analysés, l'ellipse et l'hyperbole sont étudiées à partir de la définition bifocale, et la parabole à partir de la directrice et du foyer. Ainsi les coniques sont, en général, présentées comme lieu géométrique. Mais cette présentation est statique et, par conséquent, ne permet pas aux élèves de percevoir que la courbe représentative d'une conique est la trajectoire d'un point respectant certaines propriétés géométriques.

Le travail développé sur les coniques ne permet pas aux élèves de mettre en relation leurs différents registres de représentation et les différents points de vue mis en œuvre.

Or une caractéristique importante de Cabri-Géomètre est de permettre la modification de façon dynamique des objets de base d'une figure. Ceci est très important dans la mesure où il est ainsi permis un accès rapide et continu à tous les cas de figures, ce qui fait du logiciel un outil riche de validation expérimentale des faits géométriques. Cabri permet également de visualiser la trajectoire d'un point soumis à certaines propriétés géométriques. Cette dernière caractéristique est fondamentale pour une meilleure appréhension de la notion de lieu géométrique.

Nous pensons que l'étude des coniques dans différents cadres, registres de représentation et sous différents points de vue permettra aux élèves une meilleure compréhension des objets mathématiques étudiés et l'accès et la mise en oeuvre d'outils et de techniques de résolution de problèmes mettant en jeu ces objets mathématiques.

Dans le travail proposé aux élèves, nous commençons par une activité qui met en oeuvre la définition bifocale de La Hire, et nous poursuivons par une situation mettant en jeu la définition de Leconte. Nous proposons ensuite l'obtention des coniques en utilisant les équations de Fermat et, finalement, nous terminons l'étude en nous appuyant sur la définition monofocale de Pappus.

Pour une meilleure efficacité de l'utilisation de Cabri-Géomètre pour l'enseignement-apprentissage des coniques, nous proposons aux élèves des situations mettant en jeu des phases de construction et d'exploration des figures et des phases de réflexion, de démonstration et de formulation des propriétés des objets mathématiques étudiés.

Les phases de construction et d'exploration sont développées dans l'environnement Cabri-Géomètre.

Les phases de démonstration et de formulation se font hors de l'environnement Cabri-Géomètre (mais en interaction avec les phases exécutées dans cet environnement). Notre objectif est d'amener les élèves à aller (tant que cela est possible) au delà de la construction et de la visualisation des propriétés géométriques, en les obligeant ainsi à passer d'une intuition ou présomption (avec Cabri-Géomètre) à la démonstration mathématique. Car, par exemple, ayant mesuré dans différentes positions certains éléments de sa figure, l'élève peut penser que les régularités observées à partir des résultats de ses mesures le dispensent d'une démonstration mathématique.

Nous pensons que c'est la coordination de ces différentes phases qui va permettre aux élèves une meilleure compréhension et conceptualisation des objets mathématiques en jeu. Ceci permettrait également de minimiser les

éventuels effets négatifs des éléments parasites de l'ordinateur sur les apprentissages envisagés.

IV - Quelques éléments d'analyse de la séquence didactique

Nous avons organisé et réalisé une pré-expérimentation avec 14 élèves du 2° degré (lycée) en 8 sessions de 12 heures. L'objectif principal des sessions est de familiariser les élèves à l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre. Les résultats de l'analyse de ces sessions ont servi également la construction des situations-problèmes sur les coniques

La séquence didactique que nous avons ensuite élaborée a été testée avec 4 des 14 élèves de la phase pré-expérimentale, en présence de trois observateurs. Ces élèves ont travaillé en binôme.

Trois séquences didactiques ont été présentées aux élèves. Elles ont pour objectif de faire comprendre, à travers diverses situations, les concepts d'ellipse, d'hyperbole et de parabole. Pour l'introduction des trois coniques, nous avons respectivement monté 6, puis 5 et 4 situations.

Dans ce texte, nous présentons quelques résultats obtenus à partir de l'analyse des séquences d'activités élaborées pour l'étude de la définition et des propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole. Compte tenu des exigences d'édition, nous n'entrerons pas en détail dans l'analyse des aspects didactiques liés aux comportements des élèves, mais surtout nous évoquerons les aspects mathématiques origines des difficultés des élèves dans la résolution des problèmes. Dans l'analyse qui suit, nous présentons quelques exemples caractéristiques.

1) L'ellipse

Une des activités proposées a pour objectif de caractériser l'ellipse comme lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances à deux points fixes est constante.

Activité proposée :

- a) Crée un segment $[F_1F_2]$ sur une droite r . Soit $2c$ sa longueur.
- b) Crée un segment $[AB]$ d'une droite s parallèle à la droite r . Soit $2a$ la longueur de ce segment avec $2a > 2c$.
- c) Soit $C \in [AB]$. Détermine la valeur de $AC + CB$.

- d) Construis un triangle XF_1F_2 tel que $XF_1 = AC$ et $XF_2 = CB$.
 e) Quelle propriété géométrique caractérise le point X ?
 f) Quel est l'ensemble des points X quand le point C se déplace sur le segment [AB] ?
 g) Propose une définition de l'objet mathématique obtenu à la question f).

À la suite de cette activité, les élèves perçoivent que le lieu géométrique des points P vérifiant la relation $XF_1 + XF_2 = \text{constante}$, est une courbe ovale. À la phase d'institutionnalisation, cette courbe est appelée « ellipse » et l'accent est mis sur sa propriété géométrique qui permet de la définir, à savoir: « tout point P d'une ellipse de foyers F_1 et F_2 est tel que $PF_1 + PF_2 = \text{constante}$ ».

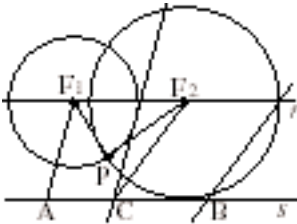


Figure 1

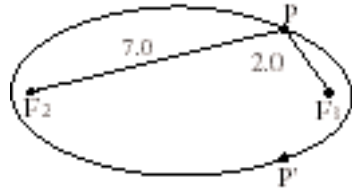


Figure 2

Les élèves découvrent à partir d'une deuxième activité que le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui sont tangents intérieurement à un cercle, est aussi une ellipse.

Nous proposons également une activité traitant le concept d'ellipse dans

le cadre algébrique à partir de la courbe d'équation $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ avec $x \leq 2$.

Activité proposée :

- a) Construis un repère cartésien orthogonal d'origine O. Construis un point A (x,0) et un point E (0,1). Construis ensuite sur l'axe des abscisses un segment de longueur égale à x^2 .
 b) Construis sur l'axe des ordonnées un segment [OB] de longueur x^2 .
 c) Construis sur l'axe des ordonnées le segment [OC] de longueur $x^2/4$.
 d) Construis sur l'axe des y le segment [OD] de longueur $1 - \frac{x^2}{4}$.

e) Construis sur l'axe des y le segment [OF] de longueur $\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ (on peut

utiliser la moyenne géométrique entre 1 et $1 - \frac{x^2}{4}$),

f) Construis le point P de coordonnées $\left(x, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right)$.

g) Quel est le lieu géométrique des points P quand le point A se déplace sur l'axe des x, avec $-2 < x < 2$?

h) Construis les points $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ et $F_2(\sqrt{3}, 0)$.

i) À l'aide de Cabri-Géomètre, observe que $PF_1 + PF_2 = \text{constante}$ quand le point A se déplace sur l'axe des x. Que conclure ? Donne une justification algébrique.

Cette activité permet aux élèves de voir le concept d'ellipse sous deux points vue différents : une définition analytique et une définition géométrique du même objet mathématique.

L'utilisation de l'option « lieu géométrique » de Cabri-Géomètre permet d'obtenir que l'ensemble des points P est une ellipse. Les élèves construisent ensuite les points F_1 et F_2 de coordonnées respectives $(-\sqrt{3}, 0)$ et $(\sqrt{3}, 0)$, foyers de l'ellipse. Ils perçoivent et démontrent ensuite que la somme des distances d'un point quelconque de cette courbe aux foyers est une constante.

Nous travaillons également le concept général d'ellipse d'équation

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Pour atteindre cet objectif, nous utilisons un théorème intéressant attribué à Proclus (400 après JC) : « Si les extrémités d'un segment de droite de longueur fixe se déplacent sur deux droites concourantes, alors un point quelconque de ce segment décrit une portion d'ellipse ».

Activité proposée :

a) Construis un repère cartésien d'origine O.

b) Crée un segment [AB] parallèle à l'axe des x.

c) Construis un segment [MN] de longueur égale à celle du segment [AB] et tel que M soit sur l'axe des y et N sur l'axe des x.

d) Construis un point P sur le segment [MN].

- e) Quel est le lieu géométrique des points P quand N se déplace sur l'axe des x ?
- f) Sachant que $MP = a$ et $PN = b$ avec $a > b$, construis les points F_1 et F_2 de coordonnées $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ et $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$.
- g) Construis un segment de longueur égale à $PF_1 + PF_2$.
- h) Compare le segment de longueur $PF_1 + PF_2$ et $2a$.

Il s'agit de construire un segment MN de longueur constante dont les extrémités sont situées respectivement sur les axes Ox et Oy d'un repère cartésien xOy. Le lieu géométrique d'un point quelconque P du segment MN tel que $MP = a$ et $NP = b$ ($a \neq b$) est une courbe ovale. La construction des points (dans un repère orthogonal) de coordonnées respectives F_1 $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ et F_2 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ et l'obtention du lieu géométrique du point P permettent aux élèves de percevoir qu'il s'agit d'une ellipse dont les foyers sont les points F_1 et F_2 .

Pour reporter le segment AB, il suffit, par exemple, de choisir le point N sur l'axe des x, de construire la droite d parallèle au segment BN, puis le cercle de centre N de rayon $NN' = AB$ avec $\{N'\} = d \cap (Ox)$.

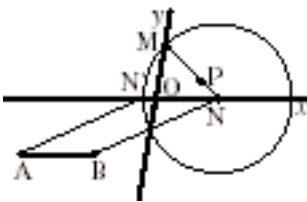


Figure 3

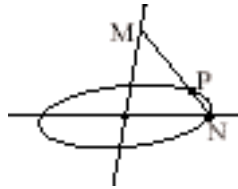


Figure 4

Le repère n'est pas nécessairement orthogonal

Ce cercle coupe l'axe des ordonnées au point M tel que $MN = AB$.

Pour construire un segment de longueur $\sqrt{a^2 - b^2}$, les élèves construisent un triangle rectangle d'hypoténuse a et dont l'un des côtés a pour longueur b.

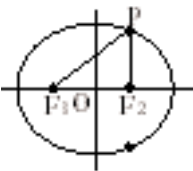


Figure 5

Les axes sont orthogonaux

Remarque

En fait le lieu géométrique des points P est une portion d'ellipse. Pour visualiser l'ellipse entière, il suffit de construire le symétrique P' du point P par rapport à l'origine des axes, puis par l'option « lieu géométrique » de Cabri-Géomètre, obtenir le lieu géométrique des deux points.

Lorsque les deux axes sont orthogonaux et que le point P est le milieu du segment MN, le lieu géométrique des points P est un cercle.

Il est intéressant de demander aux élèves de calculer l'équation de l'ellipse dans le cas le plus simple où les axes sont orthogonaux. Il suffit dans ce cas d'utiliser, par exemple, les relations trigonométriques dans un triangle.

En effet, dans le triangle MPS :

$$\cos \alpha = \frac{x}{a} \quad (1)$$

et, dans le triangle NPR,

$$\sin \alpha = \frac{y}{b} \quad (2).$$

De (1) et (2) vient l'égalité

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2,$$

d'où nous tirons l'égalité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

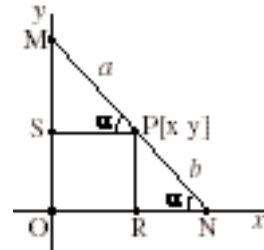


Figure 6

2) L'hyperbole

Comme dans le cas de l'ellipse, nous présentons des situations qui mettent en jeu la définition bifocale de l'hyperbole et sa définition algébrique. Les situations présentées pour l'étude de l'hyperbole mettent en jeu des aspects similaires, tant au niveau conceptuel (définition bifocale) que des stratégies des constructions géométriques. Nous présentons quelques-unes des activités proposées aux élèves.

Une première activité :

- a) Soient F_1F_2 un segment d'une droite r , $2c$ sa longueur.
- b) Créer un segment AB d'une droite s parallèle à la droite r . Soit $2a$ sa longueur, avec $2a > 2c$.
- c) Soit $P \notin [AB]$. Comparer $|PA - PB|$ et $2a$.
- d) Construire un triangle XF_1F_2 avec $XF_1 = PA$ et $XF_2 = PB$.
- e) Quel est le lieu géométrique des points X quand le point P se déplace sur la droite r tout en restant hors du segment AB ?
- g) Proposer une définition de l'objet mathématique obtenu en e).

L'objectif de de cette activité est de présenter l'hyperbole comme le lieu géométrique des points M d'un plan vérifiant la propriété $|MF_1 - MF_2| = \text{constante}$, où F_1 et F_2 sont deux points donnés.

Comme dans le cas de l'ellipse, nous traitons l'hyperbole dans le cadre algébrique à partir de la fonction d'équation $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, le théorème de Thalès (pour la construction de x^2) et la moyenne géométrique (pour la construction du segment de longueur $\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$) sont les principaux outils mathématiques utilisés. Il est aussi demandé aux élèves de construire les foyers F_1 et F_2 qui sont en fait les foyers de l'hyperbole.

L'objectif est de caractériser l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ par sa propriété géométrique liant ses foyers F_1 et F_2 et un de ses points génériques.

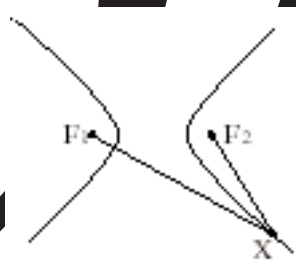


Figure 7

La figure ci-contre est le lieu géométrique des points du plan dont la différence des distances à deux points fixes de ce plan est une constante: $|XF_1 - XF_2| = \text{constante}$.

Les élèves testés n'ont aucune difficulté à constater (avec Cabri- Géométre) et à démontrer (en calculant les distances PF_1 et PF_2) que $|PF_1 - PF_2| =$ constante. La mise en relation des conceptions véhiculées par les deux définitions permet, semble-t-il, aux élèves d'avoir une vision plus globale du concept d'hyperbole.

L'un des aspects les plus importants des activités sur l'hyperbole est la vérification, puis la démonstration de la propriété $|PF_1 - PF_2| =$ constante, et que, quel que soit le cadre dans lequel l'hyperbole est étudiée, elle aura toujours la même propriété géométrique identifiée à l'activité 1.

Remarques sur les constructions de l'ellipse et de l'hyperbole

1 - Dans les activités 1 sur l'ellipse et l'hyperbole, la position du point C ($C \in [AB]$ ou $C \notin [AB]$, mais C est un point de la droite (AB)) est une variable didactique permettant, suivant les cas, de définir soit l'ellipse, soit l'hyperbole. En effet, si le point appartient à la droite s sans appartenir au segment AB, alors $|CB - CA| = 2a$. Dans ce cas, le lieu géométrique des points P, quand C se déplace sur la droite s , mais hors du segment AB, est une hyperbole. Si le point C appartient au segment AB, alors $CA + CB = 2a$, et le lieu géométrique des points P quand C se déplace sur le segment AB est une ellipse.

2- Dans les activités mettant en jeu des équations particulières d'ellipse et d'hyperbole, les résultats attendus dans l'une ou l'autre, dépendent des valeurs de x . En effet, si $-2 \leq x \leq 2$, alors $1 - \frac{x^2}{4} \geq 0$, dans ce cas le lieu géométrique des points P

$\left(x, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right)$ est une ellipse. Si $x \leq -2$ ou $x \geq 2$ alors

$1 - \frac{x^2}{4} \leq 0$, et l'ensemble des points P $\left(x, \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \right)$ est une hyperbole.

Suivant les stratégies adoptées pour la construction du segment de lon-

gueur $\sqrt{\left| \frac{x^2}{4} - 1 \right|}$, l'option « lieu géométrique » de Cabri-Géomètre appliquée

au point P, peut donner comme résultat à la fois la courbe représentative de l'ellipse et celle de l'hyperbole.

V - Conclusion

Le logiciel Cabri-Géomètre est un outil très efficace pour l'étude expérimentale des courbes qui peuvent être définies par une propriété géométrique, en particulier pour l'introduction du concept d'ellipse, d'hyperbole et de parabole. En raison de son interactivité et de sa dynamique, Cabri-Géomètre permet de construire des situations pouvant modifier radicalement la vision que les élèves ont par rapport à la géométrie.

Les activités construites sur la parabole, l'ellipse et l'hyperbole ont permis de travailler ces trois objets mathématiques dans divers cadres et de les définir sous différents points de vue. Ce travail a permis, semble-t-il, contrairement aux situations didactiques traditionnelles, de mettre en évidence l'intérêt, d'une part, de la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique et de la différenciation des représentations et des modes de traitement qui lui sont associés, et d'autre part, de l'étude des coniques comme lieux géométriques.

Bibliographie

- [1] Michèle ARTIGUE. *Ingénierie didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques vol 9 n° 3, 19, La Pensée Sauvage Éditions, 1988.
- [2] Nicolas BALACHEFF. "Didactique et intelligence artificielle" Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 14, n° 1.2, La Pensée Sauvage Éditions, 1994.
- [3] Nicolas BALACHEFF. *La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique*. Vingt ans de didactique des mathématiques en France, RDM, La Pensée Sauvage Éditions, 1994.
- [4] Carl B. BOYER. *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publications, inc. 1949.
- [5] Carl B. BOYER. *Historia da Matematica*, Editor Edgard Blucher Ltda, Editora da Universidade de Sao Paulo, 1974.
- [6] Guy BROUSSEAU. *Le contrat didactique : le milieu*. Recherches en Didactique des Mathématiques vol 9, n° 3, La Pensée Sauvage Éditions, 1988.

- [7] Michel CARRAL et Roger CUPPENS. *De D'Alembert à Cabri-Géomètre : le constructeur universel d'équations*, Repères-IREM, n° 18, janvier 1995, Topique Éditions.
- [8] Yves CHEVALLARD et Marie-Alberte JOSHUA. *Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance*. Recherches en Didactique des Mathématiques vol 3, n° 1, La Pensée Sauvage Éditions, 1982.
- [9] Morris CLINE. *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York Oxford, Oxford University Press, 1972.
- [10] Roger CUPPENS. *Faire de la géométrie en jouant... avec Cabri-Géomètre* (deux tomes), édité par l'APMEP, 1996.
- [11] Régine DOUADY. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherches en Didactique des Mathématiques vol 7, n° 2, 1986.
- [12] Sir Thomas HEATH. *History of greek mathematics, Volume II, From Aristarcus to Diophantus*, Dover publications, Inc., New-York, 1981.
- [13] A.DAHAN-DALMEDICO & J.PEIFFER. *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Éditions du Seuil, 1986.
- [14] Colette LABORDE, Bernard CAPPONI. *Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 14, n° 1.2, La Pensée Sauvage Éditions, 1994.
- [15] I. THOMAS. *Greek mathematical Works. Volume I : From Thales to Euclid*, Harvard University Press, 1967.
- [16] I THOMAS. *Greek mathematical Works. Volume II : From Aristarchus to Pappus*, Harvard University Press, 1968.
- [17] Michel ROUSSELET. *Dessiner l'espace dès le collège (avec Cabri-Géomètre)* codiffusé par Tangente, éditeur et l'APMEP, 1997.