Comment définir un trapèze isocèle ?

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

I.U.F.M. Nord-Pas-de-Calais et équipe DIDIREM, Université Paris 7

La question peut paraître stupide. Tout le monde sait bien ce qu'est un trapèze isocèle depuis l'école élémentaire. C'est aussi ce que je pensais avant d'avoir à faire un cours aux futurs professeurs des écoles. J'avais rédigé des fiches de cours rappelant les principales définitions et propriétés à connaître quand je me suis aperçue que la fiche concernant les quadrilatères contenait une contradiction à propos du trapèze isocèle, présente dans la plupart des manuels de collège. J'ai alors cherché dans mon dictionnaire de l'A.P.M.E.P. et dans les brochures « Mots », sans succès. Le but de cet article est donc de faire une proposition pour qu'on se mette d'accord sur la définition de "trapèze isocèle".

Les données du problème

En général, on définit le trapèze comme un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles. Dans ce cas, le parallélogramme est un trapèze particulier. Jusque-là, tout le monde semble à peu près d'accord. Cela paraît raisonnable. Si l'on voulait exclure les parallélogrammes, pour démontrer qu'un quadrilatère est un trapèze, il faudrait non seulement montrer qu'il a deux côtés opposés parallèles, mais aussi qu'il a deux côtés opposés non parallèles. Ceci allongerait inutilement les démonstrations.

Pour le trapèze isocèle, on a le choix entre plusieurs définitions :

1. Un trapèze isocèle est un trapèze qui a deux côtés opposés de même longueur.
2. Un trapèze isocèle est un trapèze qui a un axe de symétrie.
3. Un trapèze isocèle est un trapèze dont les côtés parallèles ont même médiatrice (ou qui a un axe de symétrie, médiatrice commune des deux côtés parallèles).
4. Un trapèze isocèle est un trapèze qui a deux côtés opposés non-parallèles et de même longueur.

Discussion

Avec la définition 1, les parallélogrammes sont des trapèzes isocèles, mais, alors, on ne peut plus démontrer qu'un trapèze isocèle a un axe de symétrie. C'est dommage ! Et c'est là que se trouve le plus souvent la contradiction dans les manuels. On choisit la définition 1 et l'on donne quand même l'existence d'un axe de symétrie dans les propriétés.

La définition 2 n'est pas très intéressante. Elle écarte les parallélogrammes ordinaires, mais pas les losanges qui ont un axe de symétrie passant par les sommets.

La définition 3 exclut les losanges non carrés et accepte les rectangles qui sont les seuls trapèzes à la fois rectangles et isocèles. Pourquoi pas ?

La définition 4 ne garde que les trapèzes isocèles non parallélogrammes. Les rectangles sont des trapèzes rectangles, mais non des trapèzes isocèles.

Ma proposition

J'ai, pour ma part, choisi la définition 3. C'est aussi le choix qu'avaient fait H. Bareil et C. Zehren dans leur manuel de sixième paru en 1986 chez Hachette (voir page 204). Le choix était le même dans l'édition de 1980, mais moins explicite (graphe page 254).

Évidemment, avec les définitions autres que la 1, il ne suffit pas de montrer qu'un quadrilatère a deux côtés parallèles et les deux autres côtés de même longueur pour conclure que c'est un trapèze isocèle. Mais perdre l'axe de symétrie, médiatrice commune des côtés opposés, me paraît plus dommageable. Je ne propose pas la définition 4 parce que les rectangles qui sont déjà des trapèzes rectangles me paraissent des trapèzes isocèles fort acceptables.

La définition 4 est peut-être plus facile à utiliser dans les démonstrations, mais, dans la mesure où la condition 4 entraîne la condition 3, je ne vois pas d'inconvénient à choisir la 3.

Bien sûr, on n'a pas les moyens de montrer cette implication en sixième. Ceci demande de s'intéresser à la longueur des obliques situées entre deux parallèles et de disposer des cas d'isométrie des triangles rectangles ou du théorème de Pythagore. Mais, justement, il serait peut-être utile de s'y intéresser de façon expérimentale parce qu'il n'est pas évident pour des élèves de sixième que des obliques situées entre deux parallèles n'ont pas toujours la même longueur et que cette longueur n'est pas celle de la perpendiculaire, comme j'ai pu le constater, il y a quelques années, dans un travail sur les aires (Douady R. et Perrin-Glorian M.J.,1989).

Le débat est ouvert, mais j'espère qu'il pourra y avoir rapidement un accord sur un point aussi élémentaire. Les professeurs des écoles ont besoin de définitions sûres et cohérentes.

Références

Bareil H. et Zehren C. (1980) Mathématiques, sixième, Hachette

Bareil H. et Zehren C. (1986) Mathématiques, sixième, Hachette

Douady R. et Perrin-Glorian M.J. (1989) Apprentissage de la notion d'aire de surface plane, Educational Studies in Mathematics n°20/4.