Les Problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"… si possible, trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur invention créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions. Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés.

Enoncés, réponses et solutions sont à envoyer à l'adresse suivante (réponses à des problèmes différents sur des feuilles séparées SVP, sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
42 quai de la Loire
75019 PARIS

ÉNONCÉS

ÉNONCÉS 276 (Michel LAFOND, 21 Dijon)

Quels sont les polyèdres convexes qui ne possèdent pas trois faces ayant le même nombre de côtés ?

ÉNONCÉ 277 (Raymond RAYNAUD, 04 Digne)

Soit ABC un triangle, R et r les rayons de ses cercles circonscrit et inscrit ; les cercles exinscrits, de centres I_A, I_B, I_C et de rayons r_A, r_B, r_C, touchent les droites (BC), (CA), (AB) respectivement en D_A, E_A, F_A ; D_B, E_B, F_B et D_C, E_C, et F_C. Posons A' = $(F_BD_B) \cap (D_CE_C)$, B' = $(D_CE_C) \cap (E_AF_A)$ et C' = $(E_AF_A) \cap (F_BD_B)$.

a) Montrer que le cercle circonscrit au triangle A'B'C' a pour centre l'orthocentre H du triangle ABC, et calculer son rayon.

b) Parmi tous les triangles délimités par les supports des côtés de ABC, A'B'C', $I_AI_BI_C$, lesquels sont semblables à A'B'C' ? Calculer pour chacun d'eux, le rayon du cercle circonscrit.

ÉNONCÉ 278 (Michel LAFOND, 21 Dijon)

On dit que u_n est géométrique arrondie de raison λ si $\forall n \in N \quad u_{n+1}$ est la partie entière de λu_n.

Trouver une suite géométrique arrondie de raison $\lambda < 3$, strictement croissante, dont tous les termes sont impairs.

À PROPOS DE L'ÉNONCÉ 273

La seconde question de l'énoncé 273, "Que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par ses deux premiers termes v_0 et v_1 et la relation de récurrence $v_{n+2} = |v_{n+1}| - v_n$?" a été posée au concours général 1998 et, à ce titre, a déjà été corrigée dans le présent bulletin : c'était une coïncidence, la rubrique avait été envoyée au bulletin en février, un mois avant le concours général.

Mais Gilbert REBEL avait posé une troisième question que j'avais omise :

c) Etudier la suite $(w_n)_{n\in N}$ définie par ses deux premiers termes w_0 et w_1 et la relation de récurrence : $\forall n \geq 0 \quad w_{n+2} = |w_{n+1}| - |w_n|$

ÉNONCÉ 255

Soient A, B, C trois réels vérifiant :

$A \geq B \geq C > 0$ et $A + B + C = \pi$

Montrer que : $\dfrac{cos\ B}{cos\ C} + \dfrac{cos\ C}{cos\ B} \leq 2\ \dfrac{sin^2 A}{sin\ B\ sin\ C}$

SOLUTION

Je ne m'attendais pas à une telle diversité de solutions pour un problème apparemment si anodin ! Les solutions reçues de 21 lecteurs : Pierre ANDRIEU (34-Béziers), Alain BAILLE (38-Grenoble), Aimée BAILLETTE (66-Perpignan), Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), J.C. CARREGA (69-Lyon), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Jean COSTESEQUE (31-Toulouse), Philippe DELEHAM (97-Mayotte), Edgard DELPLANCHE (94-Créteil), Christian DUFIS (87-Limoges), Jean-Pierre FRIEDELMEYER (67-Strasbourg), Robert GUIDICELLI (60-Beauvais), Marc LAVENIR (71-Montceau les Mines), Jacques LEGRAND (64-Biarritz), René MANZONI (76-Le Havre), A. MARCOUT (10-Ste Savine), Pascal PETER (33-La Rivière), Marguerite PONCHAUX (59-Lille), Raymond RAYNAUD (04-Digne), Pierre RENFER (67-Ostwald), André VIRICEL (54-Villers lès Nancy), sans compter les solutions fausses ou incomplètes, sont presque toutes différentes (Marie-Laure CHAILLOUT m'envoie même trois solutions distinctes), plus de 40% d'entre elles utilisent une étude de fonction (mais pas toujours la même fonction !), plus de 20% étudient séparément différents cas (mais pas toujours les mêmes cas !), et il n'est guère possible de faire une synthèse…

Disons seulement que les solutions se répartissent en deux catégories : les démonstrations purement trigonométriques, et celles qui introduisent le triangle d'angles A, B, C, de côtés a, b, c, avec, notamment, la relation : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$. Ces dernières, très légèrement majoritaires, semblent plus sûres, même si parfois elles débouchent sur des polynômes impressionnants. La plus simple d'entre elles est due à Jacques LEGRAND :

DÉMONSTRATION 1

$$\frac{cos\ B}{cos\ C} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \times \frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2}$$

$$\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{a^2-b^2+c^2}{bc} \times \frac{b^2}{b^2+(a^2-c^2)} \leq \frac{a^2-b^2+c^2}{bc}$$

car $a^2-c^2 > 0$

De même, $\frac{\cos C}{\cos B} \leq \frac{a^2+b^2-c^2}{bc}$

D'où le résultat, puisque : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Mais, parmi les démonstrations purement trigonométriques, il convient de citer l'idée de Pierre ANDRIEU :

DÉMONSTRATION 2

$\sin(B+2C)+\sin B = 2\sin(B+C)\cos C = 2\sin A\cos C$
Or $0 < C \leq B < \pi/2$ et $0 < B + 2C \leq C + 2B \leq A + B + C = \pi$

$$\text{donc : } 0 \leq \frac{\sin(B+2C)\cos B}{\sin B\cos C} = (2\sin A\cos C - \sin B) \times \frac{\cos B}{\sin B\cos C} = \frac{2\sin A\cos B}{\sin B} - \frac{\cos B}{\cos C}$$

De même, $0 \leq \frac{\sin(C+2B)\cos C}{\sin C\cos B} = \frac{2\sin A\cos C}{\sin C} - \frac{\cos C}{\cos B}$

Ce qui donne en additionnant : $\frac{2\sin A\sin(B+C)}{\sin B\sin C} - \frac{\cos B}{\cos C} - \frac{\cos C}{\cos B} \geq 0$

Les quelque vingt autres démonstrations, y compris la mienne, sont un peu plus laborieuses !

Il est clair, dans chacune des démonstrations ci-dessus, que le seul cas d'égalité est lorsque $A = B = C$.

Raymond RAYNAUD se demande dans quel domaine on peut prolonger cette inégalité si l'on ne suppose plus $A \geq B \geq C$.

Si B et C sont fixes, de coordonnées (-1,0) et (1,0), et A quelconque de coordonnées (x, y), on doit avoir : soit $|x| > 1$,

soit $(x^2 + 1)(x^2 + y^2 + 1) \leq 4$.

L'hypothèse $A \geq B \geq C$ équivaut à : $-1 < x \leq 0$, $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$.

Comme $(x^2 + 1)(4 + 2x) = 4 + 2x(x+1)^2$, elle suffit pour que l'inégalité soit vérifiée.

On peut aussi chercher d'autres relations en rapport avec celle de l'énoncé, comme : $\dfrac{\sin^2 A}{\cos B \cos C} \leq \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\sin B \sin C}$ (Edgard DELPLANCHE) ou $\dfrac{1}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C} \geq \dfrac{1}{2}$ (Jacques LEGRAND).

Jean COSTESQUE suggère d'en faire un exercice de première : avis aux amateurs.

Plusieurs lecteurs, enfin, se sont demandés d'où peut venir l'idée d'une telle inégalité. Il me semble que c'est en rapport avec l'étude d'une cubique dont nous parlerons prochainement...

ÉNONCÉ 256 (Michel LAFOND, Dijon)

Soit : $u_n = \sum_{i=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{i+1}}{i}$. Démontrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = \ln(2)$

SOLUTION d'après Martine GINESTET (75-Paris), Xavier RELIQUET et Laurent THIEULIN (78-Chambourcy).

Il est classique que $u_1 = \ln 2$ et que, pour tout n, $|u_n| < 1/n$ d'où la convergence de la série.

Posons : $S_p = \sum_{n=1}^{p} u_n^2$. Par définition., $u_{n+1} = u_n + \dfrac{(-1)^n}{n}$

Ce qui entraîne, pour tout n : $(n + 1)\, u_{n+2} = (n + 1)\, u_{n+1} - (-1)^n = n u_n + u_{n+1}$

ou encore : $(n+1)u_{n+1}\,u_{n+2} = nu_n\,u_{n+1} + u_{n+1}^2$

Dès lors, $S_{p+1} - (p+1)u_{p+1}u_{p+2} = S_p - pu_p u_{p+1}$ quel que soit $p \geq 1$:

$S_p - pu_p u_{p+1}$ est donc constant, égal à $S_1 - u_1 u_2 = u_1(u_1 - u_2) = \ln 2$, et comme

$\left|pu_p u_{p+1}\right| < \dfrac{1}{p+1}$, $\lim\limits_{p\to+\infty} S_p = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = \ln 2$.

AUTRES SOLUTIONS

Alain BAILLE (38-Grenoble), G. BENSON (60-Beauvais), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Lycée FABERT (57-Metz), Claude LAMOUREUX (92-Châtenay-Malabry), Jacques LEGRAND (64-Biarritz), René MANZONI (76-Le Havre), Michel MARGUERITE (61-Domfront), Charles NOTARI (31-Montaut), OMARJEE Moubinool (75-Paris), Alain PICHEREAU (16-St-Yrieix), Marguerite PONCHAUX (59-Lille), G. PRIGENT (93-Dugny), Xavier RELIQUET et Laurent THIEULIN (78-Chambourcy : seconde méthode), Pierre RENFER (67-Ostwald), Franck STIVAL (71-Chalon Sur Saône).

REMARQUES

L'idée initiale de l'auteur (que l'on retrouve chez René MANZONI et Charles NOTARI), c'est que les sommes partielles :

$u_n(p) = \sum\limits_{k=n}^{p} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = u_n - u_{p+1}$ vérifient très exactement :

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} u_n^2(p) \equiv u_1(p)$$

Cela se démontre par récurrence à partir de : $\sum\limits_{n=1}^{p} u_n(p) = \dfrac{1-(-1)^p}{2}$

En faisant tendre proprement p vers l'infini, on arrive à $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = u_1 = \ln 2$.

On arrive également à : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1/2$

car $p\left[u_{p+1}-\dfrac{(-1)^p}{2p}\right]\to 0$, ce qui se démontre élémentairement à l'aide de :

$$\forall k\geq 2,\ \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Ce dernier résultat $\sum_{k=1}^{+\infty}u_n = 1/2$ semble classique (OMARJEE Moubinool cite les *Exercices résolus d'analyse* de Lelong Ferrand, p. 226), et pour répondre partiellement à la question d'OMARJEE Moubinool :

"que peut-on dire de $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^q$? ", la même méthode élémentaire permet de résoudre les cas q=1, q=2 et q=3 :

$$n(u_{n+1}-u_n)=(-1)^n \text{ donc, en additionnant, } pu_{p+1}-(u_1+u_2+...+u_p)=\frac{(-1)^p-1}{2}$$

$$n(u_{n+1}^2-u_n^2)=(-1)^n(u_{n+1}+u_n) \text{ donc } pu_{p+1}^2-(u_1^2+u_2^2+...+u_p^2)=(-1)^p u_{p+1}-u_1$$

$$\begin{aligned}n(u_{n+1}^3-u_n^3)&=(-1)^n(u_{n+1}^2+u_{n+1}u_n+u_n^2)\\&=(-1)^n\left(\frac{3u_{n+1}^2}{2}+\frac{3u_n^2}{2}-\frac{1}{2n^2}\right)\text{ donc}\end{aligned}$$

$$pu_{p+1}^3-(u_1^3+u_2^3+...+u_p^3)=\frac{3(-1)^p u_{p+1}^2}{2}-\frac{3u_1^2}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Si l'on suppose connu que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\left(1-\frac{2}{4}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$,

on arrive à : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^3=\frac{3(\ln 2)^2}{2}-\frac{\pi^2}{24}$

Mais pour en revenir à l'énoncé 256 lui-même, d'autre méthodes ont été proposées : Le Lycée Fabert de Metz en donne trois.
La **première** consiste à écrire :

$$u_n=(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x}dx \text{ , donc } u_n^2=\iint_\Delta\frac{(xy)^{n-1}}{(1+x)(1+y)}dxdy$$

avec $\Delta = [0,1] \times [0,1]$, d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = \iint_\Delta \frac{dxdy}{(1-xy)(1+x)(1+y)}$

Environ la moitié des lecteurs ont utilisé cette méthode, et plusieurs ont calculé plus généralement :

$F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2(x) = \ln(1+x) + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{1+x}$ si l'on pose : $u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$

le plus souvent en dérivant : $F'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2u_n(x)u'_n(x) = \frac{-2\ln(1-x)}{(1+x)^2}$

mais aussi (Michel MARGUERITE) par une méthode élémentaire apparentée à la solution sélectionnée.

La **seconde méthode** du lycée Fabert, proche de celle de Marguerite PONCHAUX, s'appuie sur : $u_{n+1}^2 = \left(u_n - \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right)^2$ pour écrire $u_p^2 = 2\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u_n - \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

La sommation sur p fait apparaître n termes $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} u_n$ et n termes $1/n^2$, ce qui se simplifie d'autant que $u_{2n-1} - u_{2n} = 1/2n$.

La **troisième méthode**, enfin, calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \times 2\sin\vartheta\cos(2n-1)\vartheta$ pour en déduire d'abord un développement en série de Fourier de la fonction Φ définie par : $\forall \vartheta \in \left]-\pi/2 ; \pi/2\right[$, $\Phi(\vartheta) = \dfrac{\vartheta}{2\sin\vartheta}$, $\Phi(\pi/2) = 0$

et $\forall \vartheta \in R$, $\Phi(\pi + \vartheta) = -\Phi(\vartheta)$ puis la somme des carrés des coefficients au moyen de l'identité de Bessel-Parseval.

Pierre RENFER utilise lui aussi des sommes de Fourier :

Si $S_p(x) = \sum_{n=1}^{p} u_n e^{inx}$ alors $\forall x \in \left]-\pi;\pi\right[$

$$\lim_{p \to +\infty} S_p(x) = f(x) = \int_{-1}^{0} \frac{e^{ix}}{(1-t)(1-te^{ix})}\,dt$$

$$= \frac{ie^{\frac{ix}{2}}}{2\sin(x/2)}\left(\frac{ix}{2} + \ln\cos(x/2)\right)$$

donc $2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = \lim_{p \to +\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \left|S_p(x)\right|^2 dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \left|f(x)\right|^2 dx$

(d’après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue),

or $\int_{-\pi}^{+\pi} \left|f(x)\right|^2 dx = \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\sin^2 x}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\ln^2 \cos x}{\sin^2 x}\,dx$

$$= -2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx - 2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx$$

$$= \pi \ln 2 - 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx = 2 \pi \ln 2$$

car $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x \, dx$

Et selon l’A Cuncolta Matematica Fabertiana (canal historique), il y avait d’autres méthodes : plus simples ou plus complexes ?