Modélisation

Passage d’un problème réel à un problème mathématique

par J. Bair et G. Haesbroeck
Université de Liège

À la suite de nombreux mathématiciens-pédagogues contemporains, souvent regroupés dans des associations de professeurs de mathématique telles que la SBPM en Belgique [11] ou l’APMEP en France [1] et dans des centres de recherche en didactique de la mathématique comme le CREM en Belgique ou les IREM en France, nous croyons que le sens est le véritable moteur de la construction et de l’appropriation des savoirs [1, p. 6] ; il est principalement alimenté et activé par des questions que se posent les apprenants à partir de problèmes adéquats et intéressants, ni trop faciles ni trop difficiles [l, p. 5].

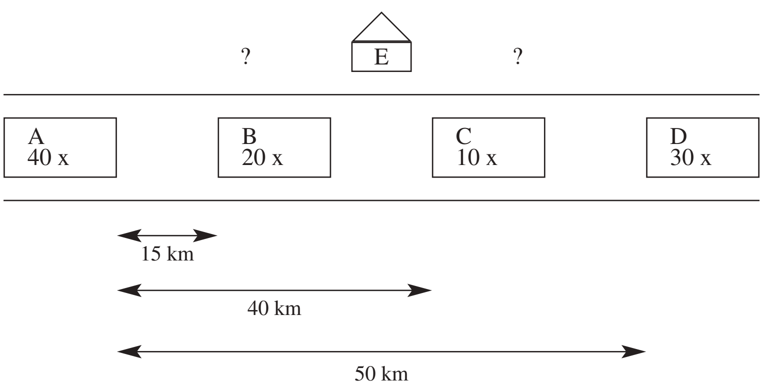
Dans ce paradigme d’une théorie constructiviste de l’apprentissage [1, p. 5], les problèmes issus du vécu de l’apprenant jouent évidemment un rôle fondamental. Parmi ces problèmes, nous n’aborderons dans cette note que ceux relevant de la problématique n° 4 de [1], à savoir les problèmes extérieurs au champ des mathématiques (vie réelle, situations extra-disciplinaires) qui peuvent être résolus par des techniques mathématiques, souvent après la construction d’un modèle adéquat ; ces problèmes sont souvent appelés par les anglo-saxons "real world problems" [9] ou "naturels" [4, p. 119], mais nous les qualifierons simplement de ”réels” par la suite.

Ces problèmes sont à la fois motivants et utiles puisqu’ils invitent l’élève à trouver la réponse à une question soulevée par une situation réellement rencontrée dans la vie courante, en particulier, dans un autre cours ou un autre chapitre du cours.

Nous pensons que, dans la résolution des questions examinées dans ce travail, les concepts de problème réel (PR, en abrégé) et de problème mathématique (PM, en abrégé) sont nettement différents, de même d'ailleurs que ne le sont les solutions appelées respectivement solution réelle (SR, en abrégé) et solution mathématique (SM, en abrégé) ; dans le même ordre d’idée et par souci de symétrie dans leur traitement, nous souhaitons distinguer les notions de modèle réel (MR, en abrégé) et de modèle mathématique (MM, en abrégé).

Illustrons ces propos par un exemple à la fois concret et très simple.

(PR) Quatre magasins A, B, C et D sont situés sur une route ; la distance entre A et B est de 15 kilomètres, celle entre B et C de 25 kilomètres et celle entre C et D de 10 kilomètres. Ces boutiques doivent être ravitaillées à partir d'un entrepôt E : sur une période de temps bien précise, A (resp. B, C, D) doit être alimenté 40 (resp. 20, 10, 30) fois. Où l’entrepôt E doit-il être idéalement placé sur cette route ? (figure 1)



Ce problème réel peut engendrer divers problèmes mathématiques. Ainsi, les données du problème réel peuvent être résumées par la série statistique S = {(0,40), (15,20), (40,10), (50,30)}, où, pour tout couple (xi,ni), le premier élément xi représente la distance en kilomètres de l'endroit considéré au point A, tandis que le second élément ni designe le nombre de fois que le magasin en question doit être alimenté à partir de E. D'où naissent "naturellement" ces deux problèmes mathématiques :
(PMa) que vaut la médiane $\tilde{x}$ de la série S ?
(PMb) que vaut la moyenne arithmétique $\bar{x}$ de la série S ?

Pour bien comprendre comment ces deux problèmes mathématiques ont pu être formulés de la sorte, il convient de construire au préalable des modèles mathématiques adéquats. En désignant par x la distance inconnue de l'entrepôt E au point de référence A, nous obtenons ici les deux modèles mathématiques suivants :

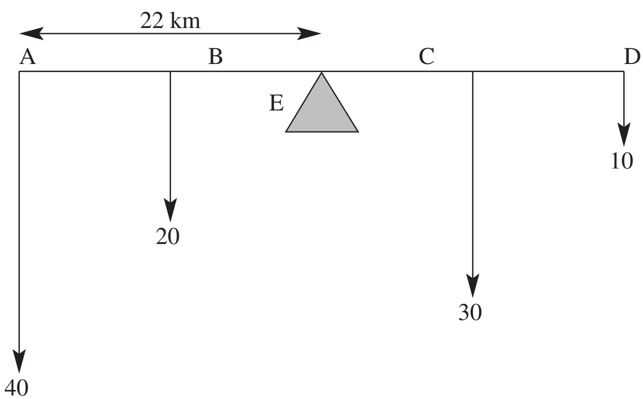
(MMa) Étude de la fonction
$f(x) = 40 \times x + 20 \times |x - 15| + 10 \times |x - 40| + 30 \times |x - 50|$
dans l'intervalle I = [0, 50].
(MMb) Étude de la fonction
$g(x) = 40 \times x^2 + 20 \times (x - 15)^2 + 10 \times (x - 40)^2 + 30 \times (x - 50)^2$
dans l'intervalle I.
De fait, $\tilde{x}$ représente le minimum de f et $\bar{x}$ celui de g sur I.

Ces modèles mathématiques ne sont évidemment pas construits arbitrairement : ils découlent directement de modèles réels correspondants. Sur notre exemple, la fonction f(x) représente en une certaine unité monétaire, le coût global de tous les transports de l'entrepôt aux divers magasins, tandis que la fonction g livre la somme des carrés des écarts des distances des magasins à l'entrepôt, cette somme étant pondérée par les fréquences d'alimentation. Les deux modèles mathématiques ci-dessus proviennent dès lors de ces modèles réels :
(MRa) Étude du coût global de transport.
(MRb) Étude de la "dispersion" des magasins autour de l'entrepôt.

Dans la pratique, bien sûr, on procédera généralement dans un tout autre ordre que celui décrit jusqu'à présent. En effet, l'examen du problème réel va faire naître un (et souvent un seul) modèle réel, qui à son tour va donner naissance à un modèle mathématique duquel sera issu un problème mathématique. Ainsi, pour notre exemple, on enregistrera la succession des implications suivantes (figure 2) :

$$PR \longrightarrow MRa \longrightarrow MMa \longrightarrow PRa$$

Notons que le second problème (PMb), à la fois simple et séduisant, ne sera pas considéré ici, même s'il rappelle un modèle bien connu en mécanique et selon lequel l'entrepôt E doit être implanté au barycentre d'une "tige" AD sur laquelle seraient placés en A, B, C et D des poids égaux aux fréquences de réalimentation des boutiques (figure 3) :



Par ailleurs, un même modèle mathématique peut conduire à plusieurs problèmes mathématiques différents en fonction des connaissances de l'élève. Par exemple, le problème (PMa) peut être remplacé, pour quelqu'un n'ayant aucune notion en statistique, par la formulation équivalente suivante :
(PMa') En quelle abscisse x la fonction f présente-t-elle son minimum sur I ?

L'exemple introductif est volontairement très élémentaire pour amorcer nos réflexions. Bien entendu, il est rare qu'un problème réel se traite aussi directement et aussi "linéairement" que ne le suggère le graphe de la figure 2.

Nous nous proposons d'examiner en détail un autre exemple concret plus élaboré, mais fort classique en microéconomie [3,7], en vue de préciser la démarche à suivre pour résoudre un problème réel et d'en dégager ensuite une heuristique générale.

[PR] Un consommateur doit acheter deux biens A et B ; comment va t-il procéder ?

Notons d’emblée que la réponse peut être évidente, auquel cas il faut évidemment donner immédiatement la solution réelle (SR., en abrégé) sans passer par des théories savantes. Par exemple, si un des biens A ou B fait défaut, le consommateur achètera uniquement le bien disponible en fonction de ses besoins et de ses possibilités budgétaires.

[MR] Pour organiser ses achats, l’individu doit se fixer des objectifs compatibles avec ses contraintes personnelles. Souhaite-t-il acheter le plus économiquement, le plus écologiquement possible ? De quels moyens financiers dispose-t-il ? Plusieurs réponses peuvent être apportées à de telles interrogations. Toutefois, les économistes estiment souvent que le consommateur cherche à retirer une satisfaction la plus grande possible des achats qu’il peut se procurer en fonction de ses possibilités matérielles. Nous nous placerons dans ce contexte de l’homo-œconomicus qui achète A et B pour obtenir une utilité maximale en respectant une contrainte budgétaire.

[MM] Il convient à présent de traduire mathématiquement ce modèle réel en définissant une fonction d’utilité U(x, y), où x et y désignent les inconnues, c’est-à-dire les quantités achetées de A et B respectivement. Cette fonction U doit obéir à certaines hypothèses "économiques", comme être croissante sur les deux variables $\left(\underline{\delta U} \quad \underline{\delta U}\right)$, ou avoir des utilités marginales

décroissantes $\left(\frac{\delta^2 U}{\delta x^2} < 0 \text{ et } \frac{\delta^2 U}{\delta y^2} < 0\right)$...

Il existe diverses techniques pour construire U, par exemple des méthodes économétriques ou simplement en questionnant de manière interactive le consommateur dans le but de construire ses courbes d’indifférence d’équation implicite U(x, y) = constante. Supposons la fonction U connue. Il convient encore de tenir compte du budget global B que le consommateur souhaite consacrer à l’acquisition des deux produits, ce qui conduit à la contrainte budgétaire $p_1x + p_2y = B$, où p_1 et p_2 sont les prix unitaires (supposés positifs) sur le marché de A et B respectivement.

[PM] Le modèle [MM] conduit tout naturellement au problème de la recherche du maximum de la fonction U(x, y) sous la contrainte budgétaire $p_1x + p_2y = B$, étant entendu implicitement que les quantités x et y restent non-négatives. Selon ses connaissances mathématiques, le consommateur s’efforcera de résoudre, par exemple, l’un ou l’autre de ces deux problèmes pas tout à fait équivalents :

[PMa] Rechercher le maximum de la fonction f, à une seule variable x, définie par $f(x) = U\left(x, \frac{B - p_1 x}{p_2}\right)$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{B}{p_1}\right]$.

[PMb] Déterminer un point stationnaire du lagrangien

$$L(x, y; \lambda) = U(x, y) + \lambda(B - p_1 x - p_2 y)$$

Le problème mathématique bien posé doit évidemment être résolu ; nous appellerons solution mathématique (SM, en abrégé) la réponse à la question soulevée par le problème mathématique ; elle doit ensuite être rédigée dans un rapport mathématique (RM, en abrégé).

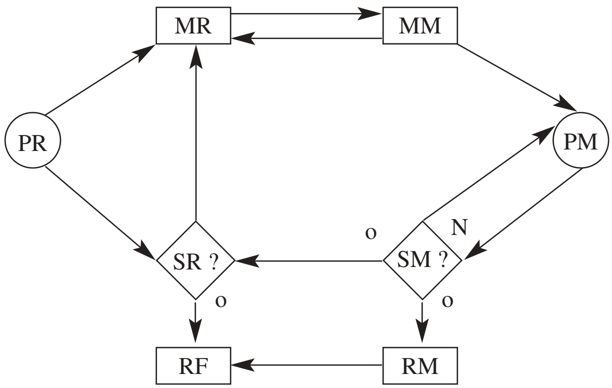
[SM] La résolution mathématique doit être contrôlée tant au niveau du raisonnement que des calculs. Une fois la réponse solution mathématique obtenue, il faut encore voir si elle a un sens d'un point de vue mathématique. Par exemple, il se peut fort bien que, dans le second problème [PMb], le point stationnaire du lagrangien trouvé possède une coordonnée négative et n'est dès lors pas acceptable ; dans pareil cas, il convient de revoir et modifier sa méthode de travail.

[RM] La solution mathématique retenue doit être présentée de manière claire, précise et avec toutes les justifications nécessaires.

[SR] Il convient ensuite de s'interroger pour savoir si la SM obtenue est idéale et correspond bien au problème réel considéré et si un autre modèle réel plus général et plus réaliste ne peut pas être utilement considéré. Par exemple, on pourrait se demander si la solution [SM] correspond au maximum de l'utilité U sous une contrainte budgétaire d'inégalité, à savoir $p_1x + p_2y \leq B$, ce qui paraît plus raisonnable que l'égalité de contrainte envisagée. Si la réponse à cette question est négative, il convient de reprendre son raisonnement au début et de le recommencer dans ce contexte plus large.

[RF] Si la solution mathématique est acceptée comme solution réelle, il faut enfin rédiger avec beaucoup de soin le rapport final (RF, en abrégé) en y incluant le rapport mathématique.

Toutes ces démarches suivies pour traiter ce problème microéconomique du consommateur peuvent et, à notre avis, doivent être accomplies face à tout problème réel. Elles sont bien résumées par ce graphe orienté (figure 4), légèrement inspiré d'un diagramme donné par la Open University d'Angleterre [9, p. 11].



Ce graphe met en évidence l'existence de deux "mondes" bien distincts fréquentés lors de la résolution de "real world problems" : le "monde réel", comprenant les quatre nœuds de gauche, se réfère au concret et au tangible, tandis que le "monde mathématique", avec les quatre nœuds de droite, est dans le domaine de l'abstrait et du purement formel : un mathématicien pourrait très bien résoudre le problème mathématique en ignorant complètement le problème réel initial.

Les nombreux circuits du graphe mettent en évidence l'existence d'une interaction perpétuelle, et tout à fait indispensable, entre ces deux mondes. Ils montrent également que les tâches à réaliser lors du traitement d'un problème réel sont multiples et complexes. Comme il est très justement écrit dans [1, p. 17], "toutes ces démarches alimentent également une **formation à l'esprit scientifique**, celui-ci se caractérisant par le développement d'un processus séquentiel constitué de conjectures, choix opportun et peut-être provisoire d'un modèle, traitement dans ce modèle, interprétation avec confrontation avec les hypothèses et anticipation dans le cas d'une bonne adéquation modèle-réalité."

Références

[1] APMEP, *Une approche des contenus d'enseignement par des problématique pour le second cycle*, décembre 1995, supplément au *Bulletin* n° 401.

[2] BAIR J. - HAMENDE G., *Mathématiques générales : problèmes résolus*, De Boeck Université, 1992.

[3] BAIR J. - HINNION R. - JUSTENS D., *Applications économiques au service de la mathématique*, éditions de la Société belge des professeurs de Mathématique d'expression française, 1989.

[4] BELLMAN R. - BROCK P., *On the concepts of a problem and problem-solving*, Amer. Math. Monthly, 67 (2), 1960, pp. 119-134.

[5] FOURASTIE J., *Fort en math !*, Delagrave, 1994.

[6] GRAS R., Une autre entrée dans les programmes d'enseignement, *Mathématique et Pédagogie* n° 113, 1997.

[7] HENDERSON J.-M. - QUANDT R.E., *Microéconomie: formulation mathématique élémentaire*, Dunod, 1982.

[8] MASON J., *L'esprit mathématique*, De Boeck Université, 1997.

[9] PARAMORE K. - STEPHENS J., Teaching Decision and Discrete Mathematics, *A Journal of Mathematics : Theta*, vol 10, n° 2, 1996.

[10] POLYA G., *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod, 1965.

[11] SBPM, *Enseigner la mathématique*, livre blanc sur l'enseignement des mathématiques en Communauté française de Belgique, 1991.

[12] WICKELGREN W., *How to solve problems : elements of a theory of problems and problem solving*, Freeman, 1974.

Adresse des auteurs :
J. Bair et G. Haesbroeck
Université de Liège
Faculté d'Économie de Gestion et de Sciences Sociales
Boulevard du Rectorat 7, Bât. B31
B-4000 Liège (Belgique)