Échanges

« Les maths, c'est pas la réalité ! »[1] ou

De la modélisation en mathématiques

Jean Claude Girard
IUFM de lyon

Bernard Parzysz
IUFM de Lorraine

Une fourmi de dix-huit mètres,
Avec un chapeau sur la tête,
Ça n'existe pas, ça n'existe pas…
Eh ! Pourquoi pas ? [2]

« *Les maths, c'est pas la réalité !* » N'avez-vous jamais été surpris par cette remarque de la part d'un élève mis en demeure d'expliquer l'inexplicable, c'est-à-dire un résultat qui défie le bon sens ? Quelle a été votre réaction ? La première idée qui vient est que cet élève a une piètre idée des mathématiques. Un enseignant entretient souvent avec sa matière des relations passionnelles et il lui est toujours désagréable de constater que sa passion n'est pas partagée. Se pourrait-il que cet élève trouve les mathématiques inutiles voire dénuées de sens ? Le pire n'est jamais certain (même s'il arrive souvent !) et une expérience récente m'a permis de répondre à cette question avec un certain optimisme.

Mes activités de formateur à l'IUFM me conduisent régulièrement (JCG) dans les classes de l'école primaire dans le but de « visiter » les professeurs des écoles stagiaires et j'étais, il y a peu de temps, dans une classe de CM1 dans laquelle la maîtresse avait posé le problème suivant : *Baptiste a 10 ans et mesure 1,39 m. Quelle sera sa taille à l'âge de 20 ans, puis à 40 ans ?* L'objectif d'un tel exercice est de faire prendre conscience aux enfants qu'il ne faut pas répondre à un problème sans réfléchir et qu'il faut vérifier la cohérence de la réponse obtenue. Ce type d'activité a pour but d'éviter les automat(h)ismes, comme dit Stella Baruk.

Ce qui devait arriver arriva ! Une partie de la classe répondit que Baptiste mesurerait 2,78 m à 20 ans et 5,56 m à 40 ans. Ce qui montre, certes, pour des CM1, une bonne technique de calcul sur les décimaux et une bonne connaissance de la proportionnalité. Mais le problème n'est pas là, bien sûr ! Un dialogue s'instaura entre ceux qui affirmaient que l'on ne pouvait pas répondre et ceux qui soutenaient que les résultats trouvés, la plupart du temps en remplissant un tableau de proportionnalité (activité qui avait fait l'objet d'un entraînement systématique au cours des séquences précédentes), étaient corrects. Et ceci, d'autant plus, qu'ils avaient vérifié leurs résultats, comme on les incite régulièrement à le faire.

À ce stade de la discussion, on peut se demander comment un élève « normalement constitué » peut affirmer sans sourciller qu'un individu mesurera 5,56 m ? On pourrait s'en tenir à une explication faisant intervenir « le contrat didactique », du même type que dans l'exemple bien connu de « l'âge du capitaine »[3], mais la suite va montrer que, derrière cette situation curieuse, se cachent des raisonnements qui ne sont pas dépourvus de sens et, finalement, des problèmes de fond.

Mais revenons à la classe. L'intention de l'enseignante, à ce moment-là, est de faire apparaître une contradiction dans le raisonnement de ceux qui ont appliqué la proportionnalité. Elle espère que ceux qui ont affirmé qu'on ne pouvait pas répondre vont avoir des arguments qui vont ébranler les convictions des autres et amener ces derniers à prendre conscience des points de méthode qui étaient les objectifs de la séquence c'est-à-dire « *il faut réfléchir* *avant de faire des calculs et, de toute façon après, il faut vérifier le bon sens de la réponse* ».

Matthieu explique effectivement à ses camarades qu'on ne peut pas répondre à la question posée car 5,56 m n'est pas une réponse cohérente avec ce qu'on sait de la taille des gens. L'enseignante renchérit en insistant « *quelqu'un de 5,56 m, ça n'existe pas !* » A quoi Stéphanie réplique « *sauf dans les contes de fées* » et la maîtresse a le dernier mot en concluant « *mais on est dans la réalité !* ». En effet, bien que la consigne soit implicite à ce sujet, il s'agit sûrement de donner une réponse cohérente avec la réalité. Damien fait alors remarquer « *de toute façon, on ne grandit pas pareil tous les 10 ans* » ce qui traduit une très bonne compréhension de la proportionnalité et de la non-proportionnalité. Les autres ne contestent pas mais c'est là qu'apparaît l'argument décisif « *Un problème, ce n'est pas la réalité, on suppose !* » affirme Bertrand en étayant son argument par le fait suivant : « *l'autre fois, la maîtresse avait dit qu'on supposait* ». On peut faire l'hypothèse que cette phrase fait référence à un problème « concret » pour lequel les conditions d'application de la proportionnalité n'étaient pas « exactement remplies » mais qui nécessitait, pour être résolu, que l'on « suppose » qu'elles l'étaient. Maints problèmes dits de proportionnalité sont de ce type. On trouve, par exemple, dans de nombreux livres, le problème suivant : *si on a utilisé 2 litres de peinture pour peindre 8 m^2, combien doit-on acheter de peinture pour pouvoir terminer les 15 m^2 qui restent ?* On « suppose » alors que le passage de la peinture est régulier, que le support est le même partout, que l'on est toujours dans la première couche, etc. En d'autres termes, on suppose que le modèle de proportionnalité peut s'appliquer. En réalité, il ne s'applique qu'approximativement. La réponse que l'on va obtenir à l'intérieur du modèle (et pour laquelle on ne peut que vérifier l'exactitude des calculs) donnera une idée de la réponse dans la réalité si les hypothèses ne sont pas « trop fausses » (et là, c'est la validité du modèle qu'il faut tester, ce qui ne peut se faire, souvent, qu'a posteriori).

Le débat entre les élèves porte ensuite sur la question de savoir si l'on peut « supposer » ou non. Ce qui peut se traduire par « *le modèle de proportionnalité est-il acceptable ou non ?* ».

En effet, les calculs sont corrects, et ont été vérifiés, à l'intérieur du modèle donc le résultat de 5,56 m est mathématiquement correct. Mais comment savoir si un modèle choisi est adapté ou non à une situation ?

D'après David Ruelle[4], « *une théorie physique consiste à coller une théorie mathématique sur un morceau de réalité… On s'intéresse à ces idéalisations parce qu'elles sont utiles* ».

La seule façon de savoir si un modèle mathématique de la réalité est correct est justement de le confronter avec la réalité. S'il donne des résultats aberrants, alors on doit le rejeter. S'il donne des résultats compatibles avec la réalité, il sera déclaré valable sans forcément qu'on sache dans quelles limites il l'est, ni s'il n'y en a pas un meilleur. La proportionnalité est souvent admise comme un bon modèle bien qu'elle ne soit qu'approximativement valable, mais on n'a pas les moyens (en particulier dans le cadre des problèmes scolaires) de le vérifier. Ici, cependant, chacun peut constater, par son expérience personnelle, que ce modèle n'est pas adapté pour mathématiser l'accroissement de la taille en fonction de l'âge.

« *Les sciences n'essayent pas d'expliquer ; c'est tout juste si elles tentent d'interpréter ; elles font essentiellement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, à l'aide de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique réside uniquement et précisément dans le fait qu'elle est censée fonctionner.* » (John Von Neumann[5])

Tout ceci devrait attirer notre attention sur le fait que l'on ne dit pas en général aux élèves que l'on est dans un modèle quand on utilise les mathématiques pour trouver la solution à un problème concret. Il est pourtant important de savoir que l'on n'est plus dans la réalité, mais dans une construction abstraite qui repose sur des hypothèses (le « *on suppose* » de Bertrand). Celles-ci ne sont généralement vraies qu'approximativement dans la réalité (ce qui, en toute logique, signifie qu'elles sont fausses !). Si elles sont vraiment trop éloignées de la vérité, les résultats obtenus par les mathématiques seront sans valeur.

Ainsi donc, si un élève vous dit « *les maths, c'est pas la réalité* », ne le prenez pas mal ! Il a entièrement raison. Ceci ne l'autorise pas, bien sûr, à donner des résultats qui défient le bon sens, mais une partie de la vérification doit se faire en dehors des mathématiques. Elle doit consister à se poser le problème de la validité du modèle. Mais parle-t-on de modélisation (dans le cours de mathématiques) aux élèves ?

Pourtant, l'accès aux modèles mathématiques devrait être l'un des enjeux fondamentaux de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. En géométrie, par exemple, le passage du dessin qui fait encore partie de l'espace sensible[6] (comme l'objet concret, palpable, manipulable, mesurable, de l'école primaire) à la figure (idéalisation d'une classe de dessins) sur laquelle on pourra mener des raisonnements mathématiques est la traduction de la modélisation du monde visible en un monde géométrique (constitué d'objets mathématiques). L'erreur, bien connue, des élèves qui pensent qu'une propriété est vraie parce qu'ils l'ont vue sur le dessin n'est que le reflet de leur difficulté à savoir s'ils sont dans la réalité (visible ou sensible) ou dans le modèle (mathématique et abstrait).

Un autre domaine dans lequel il apparaît indispensable de travailler explicitement, avec les élèves le passage de la réalité au modèle, est celui des probabilités. D'une part, parce que l'approche « fréquentiste », mise en avant dans les nouveaux programmes, risque de renforcer la confusion entre fréquences et probabilités c'est-à-dire entre réalité et modèle. D'autre part, parce que, d'une manière générale, modèle et réalité sont si intimement liés dans les énoncés, qu'il est difficile de démêler l'un de l'autre. Voyons, par exemple, le sujet national du Baccalauréat 1995, série ES, (exercice de spécialité) :

Un boulanger fabrique des pains de campagne qui doivent peser, en théorie, 600 grammes.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur les poids possibles des pains de campagne, exprimés en grammes et arrondis à 10 grammes près.

Le tableau suivant indique la probabilité p_i de l'événement $X = x_i$.

$X = x_i$	580	590	600	610	620
p_i	0,12	0,25	0,32	0,27	0,04

Exemple de lecture :

La probabilité qu'un pain choisi au hasard pèse 590 grammes est 0,25.

1) Calculer l'espérance mathématique de X et l'écart type de X.

2) Un client achète un pain de campagne. Quelle est la probabilité que son pain pèse au moins 600 grammes ?

3) Un contrôleur du service la répression des fraudes entre dans la boulangerie et prélève, au hasard, dix pains de campagne ;

a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement trois pains de 580 grammes ?

b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un pain de 580 grammes ?

c) Quelle est la probabilité d'avoir au plus un pain de 580 grammes ?

On donnera les valeurs exactes puis des valeurs décimales approchées à 10^{-4} près.

a) Dès la première phrase on fait la confusion entre une expérience réelle (un boulanger fabrique des pains) et une idéalisation des résultats (les pains doivent peser, « en théorie »[7], 600 grammes). On passe ensuite clairement, mais sans le dire, à une mathématisation en faisant intervenir une variable aléatoire. Mathématiquement, une variable aléatoire peut se définir sans référence à une quelconque réalité. Mais, ici, la seule définition possible consiste à revenir à l'expérience concrète. Quelle est-elle exactement ? Comment ont été déterminées les probabilités données ? On peut penser que c'est par une analyse statistique de la production dans le passé et sur un grand nombre de pains. Ces conclusions sont-elles encore valables pour l'avenir et, en particulier, pour la production du jour considéré ? On en fait l'hypothèse et c'est cela qui détermine le modèle. C'est donc une réalité (on a fabriqué un grand nombre de pains et on a calculé la distribution des fréquences des poids obtenus) qui définit un modèle (la loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui représente le poids d'un pain).

b) Si la première question est clairement dans le modèle, par contre, la deuxième question entretient la confusion entre réalité (un client achète un pain) et modélisation (pour calculer une probabilité, il faut être dans un modèle). Elle fait apparaître deux problèmes.

Remarquons, tout d'abord, que le poids d'un pain est par nature continu alors que le modèle choisi est discret (une variable prenant 5 valeurs seulement). On ne peut donc répondre à cette deuxième question sans ajouter une hypothèse sur la constitution des classes. Les valeurs ont été arrondies à 10 grammes près, nous dit l'énoncé. Faut-il comprendre qu'elles l'ont été par défaut, par excès ou au plus près ? Ce qui conduirait la variable aléatoire X à prendre la valeur 600, par exemple, pour les poids compris respectivement dans les intervalles [600 ; 610], [590 ; 600], ou [595 ; 605]. Dans les deux derniers cas, on ne peut pas répondre à la question posée ! On peut calculer la probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à 600 mais on ne peut pas calculer la probabilité pour que le poids d'un pain soit inférieur ou égal à 600 grammes car on ne connaît pas la répartition des probabilités des poids dans les classes. Il faut revenir à l'exemple de lecture donné à la suite du tableau et admettre qu'un pain pèse 600 grammes si son poids appartient à un certain intervalle d'amplitude 10 grammes que l'on n'a pas besoin de connaître mais qui conduit X à prendre la valeur 600.

D'autre part, le choix du pain est fait au hasard (ce n'est pas dit mais on peut le supposer, et cela fait déjà partie des hypothèses) et le calcul doit se faire à l'intérieur du modèle déjà donné (on ne voit pas comment on pourrait faire autrement). Cela pose alors un problème plus subtil. L'expérience qui consiste à choisir un pain « au hasard » dans la boulangerie est-elle la même que celle qui consiste à fabriquer un pain ? Il faut faire l'hypothèse que oui. Ce n'est pourtant pas la même réalité. La première concerne le boulanger et il peut fabriquer autant de pains qu'il veut. La deuxième est du côté du client qui, lui, ne peut choisir que dans la limite du stock restant (au moment de l'achat). N'y a-t-il pas danger de confondre les probabilités des différentes valeurs de la variable aléatoire X (le modèle) et les fréquences des poids des pains dans le magasin (la réalité).

En reprenant maintenant la situation - dont l'énoncé n'est que la partie « émergée »- dans son ensemble, on peut tenter de la schématiser de la façon suivante (qui n'est certes pas la seule possible), en distinguant deux « côtés » : celui du boulanger et celui du client.

A - Le côté du boulanger

Phase 1 : Pour constituer le tableau de probabilités donné par l'énoncé, on est parti d'un échantillon E_1, considéré comme représentatif de la production du boulanger, par exemple, la totalité de la production sur une période donnée $[t_1 ; t_2]$. Dans la population E_1, on s'est intéressé au caractère statistique S : « poids d'un pain », caractère continu pour lequel on a effectué un regroupement en classes de 10g d'amplitude (comme on l'a vu, l'énoncé ne dit rien sur la façon dont ce regroupement a été effectué). Ceci conduit à définir un nouveau caractère, discret, S_1 : « poids arrondi d'un pain », pour lequel on a la *distribution de fréquences* suivante :

$X = x_i$	580	590	600	610	620
p_i	0,12	0,25	0,32	0,27	0,04

On dispose ainsi d'un premier référentiel R_1

B - Le côté du client :

Phase 2 : On considère cette fois la population constituée par la production E_2 du boulanger disponible à l'instant t_3 ($t_3 > t_2$) où le client achète son pain, production sur laquelle on est contraint de faire l'hypothèse que le caractère statistique S_2 « poids arrondi d'un pain » a la même distribution de fréquences que S_1 : on extrapole donc à l'ensemble E_2 les résultats de l'enquête faite sur l'échantillon E_1.

Ceci constitue un deuxième référentiel R_2.

Phase 3 : On définit une expérience aléatoire dans le référentiel précédent, consistant à choisir un pain au hasard dans la population E_2 (qui devient ainsi l'univers Ω). Sur cet univers Ω, on prend comme probabilité P l'équiprobabilité, et on définit une variable aléatoire X qui prend la même valeur que S_2 en tout point (i.e. pour chacun des pains considérés). Par conséquent, l'événement $\{X = x_i\}$ - que l'on peut également noter $\{S_2 = x_i\}$ et qui n'est autre que l'ensemble des pains de E_2 dont le poids arrondi est égal à x_i- a pour probabilité

$$P(X = x_i) = \frac{\text{Card}\{S2 = x_i\}}{\text{Card } \Omega)} = F(S_2 = x_i) \quad .$$

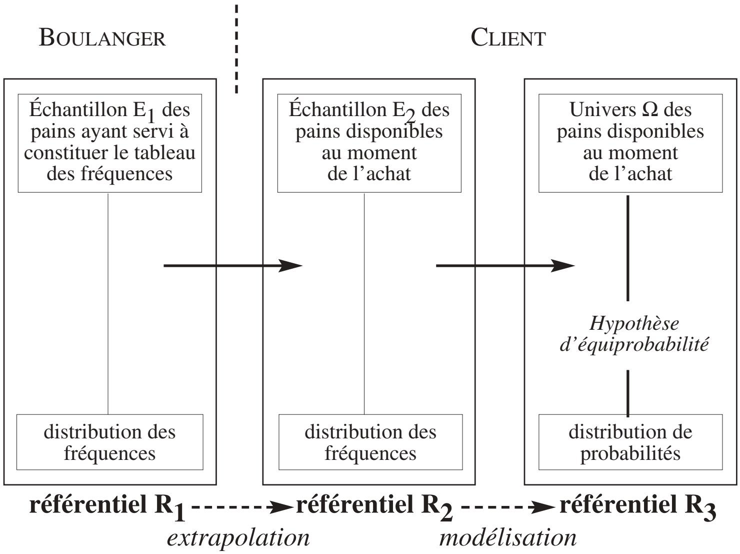
On obtient alors la *distribution de probabilités* suivante :

$X = x_i$	580	590	600	610	620
p_i	0,12	0,25	0,32	0,27	0,04

On a ainsi un troisième référentiel R_3, constitué par l'espace probabilisé suggéré par l'énoncé, sur lequel est définie la variable aléatoire discrète X.

(Remarquons ici que, s'il définit bien une variable aléatoire, l'énoncé ne précise pas *sur quel espace probabilisé* elle est définie. Faute d'information, nous sommes contraints de prendre l'univers E_2 muni de l'équiprobabilité, choix au demeurant peu en accord avec la réalité : certains aiment le pain bien cuit (donc moins lourd ?), d'autres non, etc. Mais, encore une fois, que faire sinon ? Nous touchons ici à un problème fondamental de la modélisation.)

L'ensemble de la situation peut finalement être représenté par le diagramme suivant :



Ce diagramme fait apparaître la partie « immergée » de la situation (celle qui, en fait, la rattache à la réalité), au sein de laquelle une extrapolation est nécessaire pour passer d'un référentiel à un autre. Mais il met aussi en évidence le « gommage » du *saut conceptuel* qui fait passer des fréquences aux probabilités, c'est-à-dire de la réalité au modèle ; en un mot, il court-circuite la démarche de modélisation. Ce faisant, il entretient la confusion entre deux mondes, tant et si bien qu'on ne sait plus bien dans lequel on se trouve.

c) La troisième question porte de nouveau sur une réalité (un enquêteur choisit dix pains au hasard) mais cette fois le modèle n'est pas donné. Il appartient à l'élève de modéliser et, comble de malheur, le seul modèle qu'il connaisse en terminale ES (la loi binomiale) ne s'applique pas ici ! En effet, si on se place dans une situation « réaliste », on ne voit pas le contrôleur reprendre deux fois le même pain. On est donc dans une situation qui s'apparente à un tirage « au hasard » et *sans remise* dans une urne. En toute logique, le meilleur modèle à appliquer est donc la loi hypergéométrique mais, d'une part, elle n'est pas au programme de terminale, et d'autre part elle nécessiterait de connaître le nombre total de pains en stock au moment du tirage au hasard, ainsi que la distribution des fréquences de leurs poids. On doit donc considérer, comme dans la deuxième question, que choisir 10 pains revient à fabriquer 10 pains et que le poids de chacun est aléatoire (modélisable par la loi de probabilité donnée) et *indépendant* du poids des autres, ce qui nous ramène à un schéma de Bernoulli. « Supposer » l'indépendance revient donc à construire un modèle incluant une hypothèse forte qui ne figure pas dans l'énoncé, même de façon implicite. La seule justification possible est que, sans elle, on ne peut pas faire le problème (voir plus haut), mais c'est, convenons-en, un raisonnement assez spécieux.

Finalement, cette situation n'est pas très éloignée de celle du problème de Baptiste. Faut-il « supposer » ou non ? Cette fois, c'est au professeur d'alerter les élèves sur le fait que « le modèle n'est pas la réalité ». Doit-on en conclure qu'il faut habituer nos élèves à réfléchir à propos de la modélisation plutôt que de les entraîner seulement à appliquer des modèles ? Certains peuvent penser que ce n'est pas le rôle des mathématiques, qui est de produire des modèles et de savoir les mettre en œuvre. Et pourtant, cela pourrait donner du sens à ce que l'on enseigne et éviter certaines réflexions entendues dans d'autres circonstances : « *Cherche pas à comprendre, c'est des maths !* ».

1) *Merci à Agnès pour son concours involontaire.*
2) *Robert Desnos,* Chantefleurs et chantefables*, Éditions Gründ, 1944*
3) *IREM de Grenoble,* Quel est l'âge du capitaine ?*, Bulletin de l'APMEP, n° 323, avril 1980*
4) *David Ruelle,* Hasard et Chaos*, Éditions Odile Jacob, Paris, 1991*
5) *Cité par James Gleick,* La théorie du chaos*, Albin Michel, Paris, 1989*
6) *Y. Chevallard - M. Juillien,* Autour de l'enseignement de la géométrie au collège*,* Petit x*, n° 27, IREM de Grenoble*
7) *mais quel est le sens de cette expression ? Exactement 600 grammes ?*