Dans nos classes
Lycée

Simulation d'un exercice de probabilité

Bruno LOVAT
Daniel VAGOST
IUT Metz (département STID)

Sous le titre " Un exercice émoustillant de calcul des probabilités ", (bulletin n° 412) Edith Kosmanek proposait une situation qui nous a émoustillés. Nous rappelons le problème: deux espions doivent se rencontrer discrètement ; ils se rendent en un lieu donné le premier lundi de chaque mois entre 17 et 18 heures ; le premier arrivé attend un certain temps t de [0, 1], à l'issue duquel il repart, même sans avoir rencontré l'autre. Le problème consiste à calculer le temps t de sorte que les deux agents se rencontrent au moins une fois par trimestre avec une probabilité de 0,95. Les hypothèses sont : l'instant d'arrivée de chaque agent est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur [0, 1] , les deux variables X et Y ainsi définies étant supposées indépendantes. La solution proposée consistait en l'étude de la variable D = |X - Y|, durée qui sépare les deux arrivées. Edith propose une solution analytique qui n'est pas à la portée du premier élève venu. Nous proposons ici une approche radicalement différente qui va consister à simuler la situation. Pour notre étude nous avons utilisé Derive mais tout autre logiciel permettant le même type de fonction fera l'affaire.

1°) Définissons les deux variables aléatoires X et Y qui prennent pour valeur un nombre entier entre 0 et 60 (nous allons considérer que l'instant d'arrivée de chacun des deux agents est mesuré à la minute près, mais il est possible d'affiner à volonté).

2°) Si t est le temps d'attente convenu, mesuré aussi en minutes, il y aura rencontre si, le jour donné, $|X-Y| \leq t$ autrement dit si $t - |X-Y| \geq 0$. Nous allons procéder à la réalisation de X et Y un certain nombre de fois : chaque simulation de (X,Y) correspondra au premier lundi d'un mois; nous regrouperons les résultats (les différences $t - |X - Y|$) par trois (pour un trimestre) : si nous considérons k trimestres nous aurons alors une matrice (k, 3) : une ligne de cette matrice correspondant à un trimestre. Il y aura rencontre au moins une fois par trimestre si dans chaque ligne il y a au moins un nombre positif, autrement dit, si et seulement si, le plus grand des trois nombres de chaque ligne est positif.

3°) Deux cas se présentent alors :

- ou bien le plus grand des trois nombres de la ligne j (que nous notons R (j, k, t)) est positif et il y a au moins une rencontre au cours du $j^{\text{ième}}$ trimestre, ce que nous coderons 1 ;
- ou bien R (j, k, t) est strictement négatif et il n'y a aucune rencontre au cours du $j^{\text{ième}}$ trimestre, ce que nous coderons 0.

4°) Définissons le vecteur U (k,t) nous permettant de dénombrer le nombre de trimestres où il y a au moins une rencontre : c'est un vecteur constitué de 1 et 0. Il suffit de compter le nombre de 1 pour dénombrer le nombre de trimestres où il y a eu au moins une rencontre (le temps d'attente convenu étant t) ; ce nombre, que nous notons N (k, t) est égal au produit scalaire de U (k,t) par U (k,t).

5°) Faisons varier t de 0 à 60 et notons S (k) le vecteur dont les composantes sont les N (k, t).

6°) Nous allons, bien évidemment estimer la probabilité par la fréquence du nombre de rencontres sur le nombre de trimestres ; nous souhaitons que la probabilité soit au moins de 0,95. Ceci signifie que sur 100 trimestres, par exemple, (soit sur 100 lignes de la matrice) 95 au moins auront vu une rencontre ; autrement dit il faudra que le N (100, t) correspondant soit supérieur ou égal à 95 ; bien sûr pour 200 trimestres le nombre correspondant à cette fréquence de 0.95 sera 190 et pour 300 trimestres ce sera 285.

Programme Derive correspondant :

```
#1 X :=ALEA(61)
#2 Y :=ALEA(61)
#3 PO(x) : = IF[x=0, 1, POS(x)] * définit 0 comme
   positif (si t - |X - Y| = 0 il y a rencontre) ;
#4 R(j, k, t) : = ELEMENT(MAX(VECTEUR(VECTEUR(t,
   i, 1, 3), m, 1, k) - VECTEUR(VECTEUR(|X-Y|,
   i, 1, 3), m, 1, k)) , j) * définit le plus grand des
   trois nombres de la jième ligne (1 ≤ j ≤ k ) de la matrice.
#5 U(k, t) := VECTEUR(PO(R(j, k, t )), j, 1, k)
#6 N(k, t) := U(k, t).U(k, t).
#7 S(k) := VECTEUR(N(k, t), t, 0, 60)
```

Résultats issus de quelques simulations

Il suffit alors d’exécuter ce programme en ajoutant la ligne suivante: `#8 S(100)`, pour simuler 100 trimestres, ou `#8 S(200)`, pour simuler 200 trimestres, ou…

`#8 S(100)` nous a permis d’obtenir les résultats suivants (voir tableau page suivante) : (n (t) est le nombre de trimestres où il y a eu au moins une rencontre avec le temps d’attente convenu égal à t)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n(t)	1	2	2	6	14	20	19	21	41	40	45	47	51	59	59	69	73	77	80

t	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
n(t)	80	82	84	85	87	93	90	96	96	99	95	97	96	100	98	96	98	100	97

t	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
n(t)	99	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

t	58	59	60
n(t)	100	100	100

Grâce à cette simulation nous avons obtenu, pour chaque t, une estimation f(t) de la probabilité de rencontre ; ceci nous permet de visualiser à partir de quelle valeur de t cette fréquence est supérieure ou égale à 0,95. Ici nous obtenons t = 27, valeur à partir de la quelle la fréquence est constamment supérieure à 0,95.

Dans une deuxième et une troisième simulations, obtenues respectivement avec S(200) et S(300), c'est à partir de t = 24 que cela se produit.

Quelques remarques pour terminer

• Il est bien sûr possible de mesurer la qualité de cette estimation : au lieu d’une estimation ponctuelle on pourra déterminer un intervalle de confiance pour t .

• Il est intéressant de noter que les deux dernières simulations ont donné la réponse exacte obtenue par Edith Kosmanek dans l’article cité. On peut constater aussi que la fonction n qui à t associe le nombre de trimestres où il y a eu au moins une rencontre n’est pas obligatoirement croissante. Par exemple dans la première simulation pour 100 trimestres, on remarque que lorsque t varie de 27 à 35, n(t) fluctue entre 95 et 100.

Le lecteur pourra à loisir procéder à d’autres simulations pour illustrer ce problème ou pour en imaginer d’autres.