Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Non ! On ne peut pas parler ce mois-ci de « Problèmes de l'APMEP » mais d'exercices que beaucoup d'entre vous connaissent car ils sont depuis peu dans le domaine pubiic : les énoncés du ***Concours Général 1998****.*

En publiant des solutions autant que possible originales de ces cinq exercices, j'espère répondre à l'attente d'un certain nombre d'entre vous, mais la question : le Bulletin peut-il s'offrir et la Rubrique et les Olympiades et le Concours Général est plus que jamais d'catualité. La Rubrique prend du retard, je vous prie de m'en excuser, et toutes les suggestions à ce sujet peuvent être envoyées à la nouvelle rédaction du Bulletin et/ou à moi-même, à ma nouvelle adresse :

ATTENTION :
Nouvelle Adresse !

François LO JACOMO
42, quai de la Loire
75019 PARIS

Concours Général 1998
Classe de Terminale S

Exercice I

Un tétraèdre $ABCD$ vérifie les conditions suivantes :
a) Les arêtes AB, AC et AD sont deux à deux orthogonales ;
b) $AB = 3$ et $CD = \sqrt{2}$.
Déterminer la valeur minimale de
$$BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$$

Solution

$$BC^6 - AC^6 = (BC^2 - AC^2)((BC^2 - AC^2)^2 + 3BC^2 . AC^2)$$
$$BD^6 - AD^6 = (BD^2 - AD^2)((BD^2 - AD^2)^2 + 3BD^2 . AD^2)$$
les triangles ABC et ABD étant rectangles,
$$BC^2 - AC^2 = AB^2 = BD^2 - AD^2$$
or, $AB = 3$ par hypothèse.
La somme étudiée vaut donc :
$$S = BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6 = 9(81+81+3(BC^2.AC^2 + BD^2 . AD^2))$$
Or, $BC^2.AC^2 + BD^2 . AD^2 = (AC^2 + AB^2)AC^2 + (AD^2 + AB^2)AD^2$
$$= (AC^2 + AD^2)^2 - 2AC^2.AD^2 + AB^2(AC^2 + AD^2)$$

Comme $AC^2 + AD^2 = CD^2 = 2$ et $AB^2 = 9$,
$S = 9(81 + 81 + 66 - 6AC^2.AD^2)$
et S est maximum lorsque $AC^2.AD^2$ est minimum, donc lorsque $AC^2 = AD^2$ vu que $AC^2 + AD^2 = 2$ est constant.
$S = BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$ est maximum lorsque $AC = AD = 1$, et il vaut alors : $9 \times 222 = 1998$.

Exercice II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout entier naturel n, la relation :

$$u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n.$$

Montrer qu'il existe un entier p non nul tel que la relation $u_n = u_{n+p}$ ait lieu pour tout entier naturel n.

Solution

La solution la plus élémentaire à mettre en œuvre, et qui ne conduit pas à des calculs démesurés, consiste à envisager empiriquement et systématiquement tous les cas possibles : par exemple, si $u_n \leqslant 0$ et $u_{n+1} \leqslant 0$, alors, $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, donc $u_{n+3} = -2u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, etc.

On trouve ainsi $p = 9$, et il y a neuf cas à envisager : cette coïncidence n'est nullement un hasard.

Car pour mieux comprendre la logique de cette suite, on peut aussi faire les remarques suivantes :

La relation définissant les suites, qui peut s'écrire : $\forall n,\ u_n + u_{n+2} = |u_{n+1}|$ permet, à partir de deux termes consécutifs de la suite, de calculer non seulement le terme qui suit, mais aussi celui qui précède, et donc, de proche en proche, tous les termes de la suite. En particulier, si la relation $u_n = u_{n+p}$ a lieu pour deux valeurs consécutives de n, elle a lieu pour tout entier n.

Par ailleurs, $u_n + u_{n+2} = |u_{n+1}| \geqslant 0$ pour tout n. On a même $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \geqslant 0$. On a aussi $u_n + u_{n+3} \geqslant 0$, l'égalité étant vérifiée si et seulement si $u_{n+1} \leqslant 0$, pour tout n, car

$$(u_n + u_{n+2}) + (u_{n+1} + u_{n+3}) = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| \geqslant u_{n+1} + u_{n+2}$$

et l'égalité a lieu si et seulement si u_{n+1} et u_{n+2} sont tous deux positifs ou nuls : sur quatre termes consécutifs de la suite, l'un au moins est négatif ou nul, car si les deux du mileu sont positifs, les deux extrêmes sont opposés. Notons au passage que si les deux termes du milieu sont négatifs ou nuls, les deux extrêmes sont égaux car :
$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} = 0 = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3}$ du fait que $u_{n+1} \leqslant 0$ et $u_{n+2} \leqslant 0$.

Entre u_3 et u_6, il existe au moins un $u_i \leqslant 0$, ce qui entraîne : $u_{i+2} \geqslant 0$ et $u_{i+3} \geqslant 0$, car $u_i + u_{i+2} \geqslant 0$ et $u_i + u_{i+3} \geqslant 0$.

Si $u_{i+1} < 0$, on pose $k = i + 1$, sinon on pose $k = i$, de sorte qu'entre u_3 et u_7 il existe au moins un $u_k \leqslant 0$ tel que u_{k+1}, u_{k+2} et u_{k+3} soient tous trois positifs ou nuls. Il en résulte : $u_k + u_{k+3} = 0 = u_{k+1} + u_{k+4}$, donc $u_{k+4} \leqslant 0$. Cela implique que $u_{k-1} + u_{k+5} = 0$, car

$$(u_{k-1} + u_k + u_{k+1}) + (u_{k+3} + u_{k+4} + u_{k+5}) = 0$$

du seul fait que $u_k \leqslant 0$ et $u_{k+4} \leqslant 0$. Or, $u_k + u_{k+3} = 0 = u_{k+1} + u_{k+4}$. Mais cela implique également, puisque $u_{k+4} \leqslant 0$, que $u_{k+6} \geqslant 0$ et $u_{k+7} \geqslant 0$, donc que $u_{k+5} + u_{k+8} = 0$. On en déduit $u_{k-1} = u_{k+8}$ pour une valeur de k comprise entre 3 et 7.

Comme $u_{k-1} + u_{k+5} = 0$, l'un des termes u_{k-1} ou u_{k+5} est négatif ou nul. Si $u_{k+5} \leqslant 0$, alors u_{k+7} et u_{k+8} sont positifs ou nuls, donc $u_{k+6} + u_{k+9} = 0$ tout comme, pour la même raison $u_k + u_{k+3}$. Or, u_{k+4} et u_{k+5} étant négatifs ou nuls, $u_{k+3} = u_{k+6}$, d'où $u_k = u_{k+9}$, ce qui, dans ce premier cas, achève la démonstration de la périodicité de la suite. Si, par contre, c'est u_{k-1} qui est négatif ou nul, $u_{k+1} + u_{k+4} = 0 = u_{k+4} + u_{k+7}$ vu que u_{k+2}, u_{k+3}, u_{k+5} et u_{k+6} sont positifs, donc $u_{k+1} = u_{k+7}$ et $u_{k-2} = u_{k+1}$ car u_{k-1} et u_k sont négatifs : cela achève la démonstration dans ce second cas. La relation $u_n = u_{n+p}$, pour $p = 9$, a lieu pour deux valeurs consécutives de n ($k - 1$ et k dans le premier cas, $k - 1$ et $k - 2$ dans le second cas), elle a donc lieu pour tout entier n.

En regardant de près la démonstration ci-dessus, on voit que sur une période de neuf termes, la suite prend six valeurs positives et trois valeurs négatives. Les six valeurs positives sont groupées trois par trois alors que les valeurs négatives sont alternativement isolées et par deux. Mis à part le cas trivial $u_0 = u_1 = 0$, la suite ne peut pas avoir de période plus petite que 9. Appelons $u_q = -a$ une valeur négative isolée (pour $q > 4$). $u_{q+3} = u_{q-3} = a$. $u_{q-1} + u_q + u_{q+1} = 0$, ce qui incite à poser $u_{q+1} = \dfrac{a}{2} + b$; $u_{q-1} = \dfrac{a}{2} - b$

avec $|b| \leqslant a/2$. $u_{q+4} = -u_{q+1} = -a/2 - b$ et $u_{q-4} = -a/2 + b$. $u_{q+2} = 3a/2 + b$ et $u_{q-2} = 3a/2 - b$. La suite u_n prend donc au plus 8 valeurs distinctes, et $|u_n|$ prend au plus 5 valeurs distinctes. Les neuf cas mis en évidence par la technique empirique mentionnée initialement correspondent à : $q = n$, $q = n + 1$, ...$q = n + 8$, modulo 9. La valeur moyenne de u_n est $4a/9$ alors que la moyenne de $|u_n|$ vaut le double : $8a/9$.

Quelques semaines avant le Concours Général, j'avais choisi comme énoncé 273 de la rubrique des Problèmes une proposition de Gilbert REBEL (65 - Tarbes) avec plusieurs variations autour de ce même thème. Je maintiens cet énoncé car il contient, outre le cas traité ci-dessus, plusieurs cas assez différents non dépourvus d'intérêt. Dans un |Rêve d'absolu !|, Gilbert REBEL suggère même la formulation suivante :

Démontrer

$\forall (a,b) \in \Re^2$

$$
\begin{aligned}
a = {} & ||||||||b|-a|-b|-|b|+a|-||b|-a|+b|-|||b|-a|-b|+|b| \\
& -a|-||||b|-a|-b|-|b|+a|+||b|-a|-b|-|||||b|-a|-b| \\
& -|b|+a|-||b|-a|+b|+|||b|-a|-b|-|b|+a| \\
& -||||||b|-a|-b|-|b|+a|-||b|-a|+b|-|||b|-a|-b|+|b| \\
& -a|+||||b|-a|-b|-|b|+a|-||b|-a|+b
\end{aligned}
$$

⇨ Gilbert REBEL nous a quittés le 27 mai 1998, emporté, à 61 ans, par un cancer diagnostiqué en décembre dernier.

Exercice III

Pour tout réel x on note $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Soit k un entier fixé, supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$f(n) = n + E\left(\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}}\right)$$

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la fonction f.

Solution La fonction f est manifestement croissante. Si elle ne prend pas une valeur m, c'est qu'il existe un entier n tel que $f(n) < m$ et $f(n+1) > m$, donc un entier $p = m - n > 0$ tel que :

$$\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}} < p \leqslant \left(\sqrt[k]{(n+1) + \sqrt[k]{(n+1)}}\right) \quad (1)$$

Or, si $n \leqslant p^k - p$, $\sqrt[k]{n} < p$ donc $\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}} < p$. n doit donc être supérieur ou égal à $p^k - p$ pour que l'inégalité de droite de (1) soit vérifiée.

Inversement, si $n \geqslant p^k - p + 1$, comme

$p^k - (p-1)^k = p^{k-1} + p^{k-2}(p-1) + \ldots + p(p-1)^{k-2} + (p-1)^{k-1} > p - 1$

$\sqrt[k]{n} \geqslant \left(\sqrt[k]{p^k - p + 1}\right) > p - 1$ donc $\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}} > p$ et n doit être strictement inférieur à $p^k - p + 1$ pour que l'égalité de gauche de (1) soit vérifiée.

En définitive, l'inégalité (1) n'est vérifiée que si $n = p^k - p$, auquel cas $f(n) = p^k - 1$ et $f(n + 1) = p^k + 1$, c'est la valeur $m = p^k$ qui n'est pas prise par la fonction f.

La fonction f prend donc toutes les valeurs de IN sauf les puissances k-ièmes d'entiers (à commencer par 1, car $0 = f(0)$).

Exercice IV

On considère deux droites D_1 et D_2 sécantes en O, et un point M n'appartenant à aucune de ces deux droites. On considère deux points variables A sur D_1 et B sur D_2 tels que le point M appartienne au segment $[AB]$.

(Les questions 1 et 2 sont indépendantes.)

1) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle l'aire du triangle OAB est minimale. Construire les points A et B ainsi déterminés.

2) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle le périmètre du triangle OAB est minimal et qu'on a alors l'égalité des périmètres des triangles OAM et OBM ainsi que la relation :

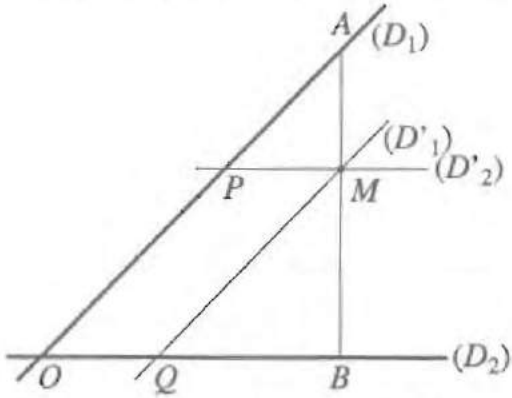
$$\frac{AM}{\tan \frac{\widehat{OAM}}{2}} = \frac{BM}{\tan \frac{\widehat{OBM}}{2}}$$

Construire les points A et B ainsi déterminés.

Solution

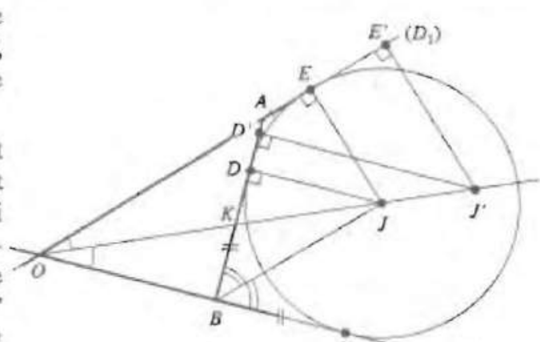
1) L'aire du triangle OAB vaut $\frac{1}{2}.OA.OB.\sin\widehat{AOB}$, elle est donc minimale lorsque le produit $OA.OB$ est minimal.

Menons par M des parallèles (D'_1) et (D'_2) à (D_1) et (D_2) respectivement, qui rencontrent (D_2) et (D_1) respectivement et Q et P. D'après Thalès, $\frac{MP}{OB} = \frac{MA}{AB}$ et $\frac{MQ}{OA} = \frac{MB}{AB}$, donc, quels que soient A et B, $\frac{MP}{OB} + \frac{MQ}{OA} = 1$. Si la somme de deux nombres est constante, leur produit est maximum quand ces deux nombres sont égaux : MP et MQ étant constants, $OA.OB$ (donc l'aire du triangle OAB) est minimum quand $\frac{MP}{OB} \cdot \frac{MQ}{OA}$ est maximum, donc quand $\frac{MP}{OB} = \frac{MQ}{OA} = \frac{1}{2}$. $OPMQ$ étant un parallélogramme, les points A et B cherchés sont les symétriques de O par rapport à P et Q respectivement, le segment $[AB]$ est l'homothétique de la diagonale $[PQ]$ dans l'homothétie de centre O et de rapport 2, qui envoie le centre du parallélogramme en M.



2) Considérons un triangle AOB, quelconque, J le centre du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{O}$, et choisissons un point J' quelconque de la bissectrice $[OJ)$. Appelons K le pied de la bissectrice $[OJ)$.

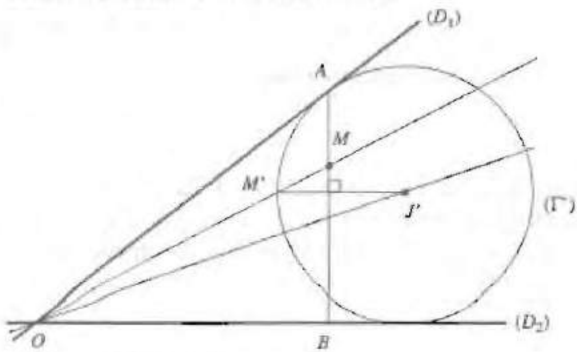
Le cercle de centre J et de rayon r exinscrit au triangle OAB touche $[AB]$, $[OA)$ et $[OB)$ en D, E et F respectivement, et il est classique que : $OE = OF = \frac{1}{2}(OA + AB + BO)$ vu que $AD = AE$ et $BD = BF$. Appelons E' et D' les projections orthogonales de J' sur $[OA)$ et (AB) respectivement. Si J' n'appartient pas au segment $[OJ]$, d'après Thalès, $\frac{J'E'}{JE} = 1 + \frac{JJ'}{OJ} < 1 + \frac{JJ'}{KJ} = \frac{J'D'}{JD}$: comme $JE = r = JD$, $J'E' < J'D'$, ce qui entraîne que le cercle de centre J' et de rayon $J'E'$, tangent à $[OA)$ et $[OB)$, ne coupe pas la droite (AB).



Ce premier résultat assez évident nous conduit tout droit à la solution : si le cercle de centre J' tangent à $[OA)$ et $[OB)$ coupe le segment $[AB]$, alors J' appartient au segment $[OJ]$ et E' au segment $[OE]$, donc $OE' \leqslant OE = \frac{1}{2}(OA + AB + BO)$. Considérons donc le plus grand des deux cercles passant par M et tangents à (D_1) et (D_2), appelons-le (Γ), et appelons E et F ses points de contact avec (D_1) et (D_2) respectivement. Quels que soient les points A et B variables sur (D_1) et (D_2) tels que M appartienne à $[AB]$, le cercle (Γ) coupe le segment $[AB]$ en M, donc $OE = OF \leqslant \frac{1}{2}(OA + AB + BO)$, l'égalité n'ayant lieu que si (AB) est tangente au cercle, (Γ) étant alors le cercle exisncrit à OAB dans l'angle $\widehat{O}$.

C'est donc lorsque (AB) est tangente à (Γ), en M bien évidemment, que le périmètre du triangle OAB est minimal, égal à $2OE = 2OF$. Comme on a alors $AE = AM$ et $BF = BM$, les triangles OAM et OBM ont même périmètre $OE + OM = OF + OM$. En outre, si l'on appelle J le centnre de (Γ), BJ étant bissectrice extérieure de $\widehat{OBM}$, $BM = JM.\tan\frac{\widehat{OBM}}{2}$ et pour la même raison, $AM = JM.\tan\frac{\widehat{OAM}}{2}$, donc $\dfrac{AM}{\tan\frac{\widehat{OAM}}{2}} = JM = \dfrac{BM}{\tan\frac{\widehat{OBM}}{2}}$

Construire les points A et B revient donc à construire (Γ) et sa tangente en M. Si J' est un point quelconque de la bissectrice intérieure de $\widehat{AOB}$, le cercle (Γ') de centre J' tangent à (D_1) et (D_2) coupe $[OM)$ en deux points : appelons M' le plus proche de O. Par l'homothétie transformant (Γ') connu en (Γ) inconnu, il est clair que la tangente cherchée (AB) est perpendiculaire à $(J'M')$, ce qui achève la démonstration.



Remarque

Différentes solutions ont été proposées pour cet énoncé pourtant assez difficile. Pour la deuxième question, par exemple, ma première idée était que comme les triangles AMP et MBQ sont semblables, les nombres :

$$AM - MP + PA = OA + AM - (MP + MQ)$$

et $$MB + QB - QM = OB + MB - (MP + MQ)$$

ont un produit constant, égal à :

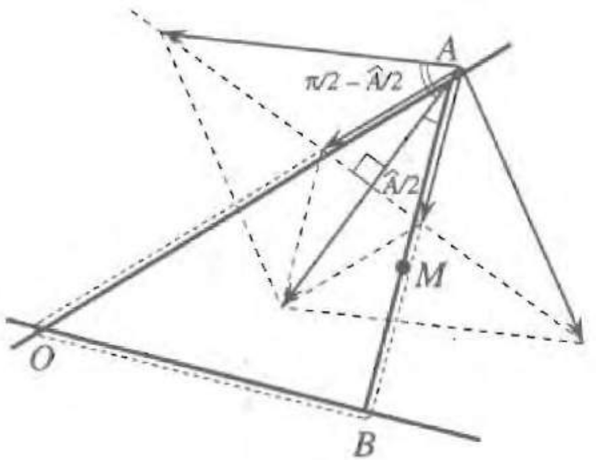
$$\frac{MB}{AM}\left(AM^2 - (MP - PA)^2\right) = MP.MQ\left(2 - 2\cos\widehat{APM}\right)$$

donc leur somme est minimale quand ces deux nombres sont égaux.

Mais Dominique ROUX (87 - Limoges) regrette que personne n'ait pensé à la justification physique de ces résultats qui, à elle seule, constitue une démonstration valable.

Une bulle de savon (plane) à l'intérieur du triangle AOB déformera ce dernier (en faisant pivoter AB autour de M) jusqu'à ce que sa surface soit minimale. Les tensions qu'elle exercera sur MA et sur MB seront proportionnelles aux longueurs MA et MB, et elles s'équilibreront (surface minimale) si et seulement si $MA = MB$.

Un élastique faisant le tour du triangle OAB tendra, lui, à minimiser le périmètre de ce triangle. La résultante des forces de même intensité T qu'il exercera sur A, en direction de O et de B, sera une force d'intensité $2T\cos\frac{\widehat{A}}{2}$ portée par la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$. Ces forces induiront des forces perpendiculaires aux barres OA et AB supportant l'élastique, forces de même résultante et donc d'intensité $\dfrac{2T}{\tan\frac{\widehat{A}}{2}}$. La barre AB, seule mobile, se stabilisera lorsque les moments des forces que l'élastique exerce sur elle en A et B s'annuleront, donc lorsque $\dfrac{AM}{\tan\frac{\widehat{A}}{2}} = \dfrac{BM}{\tan\frac{\widehat{B}}{2}}$, ce qui entraîne que les bissectrices extérieures des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ du triangle OAB coupent la perpendiculaire en M à AB au même point J : M est donc le,point de contact du cercle exinscrit, d'où l'égalité des périmètres de OAM et OBM. (figure page suivante).



Exercice 5

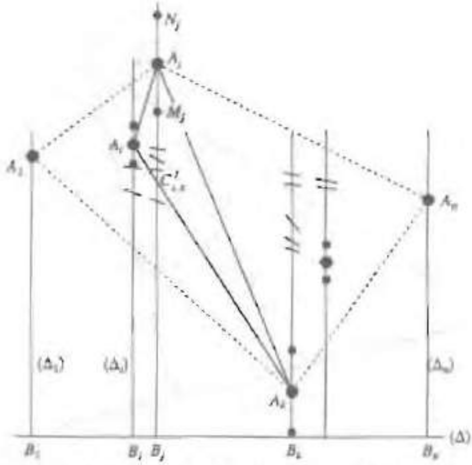
Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère un ensemble A de n points du plan, cet ensemble ne contenant pas trois points alignés.

Montrer qu'il existe un ensemble S de $2n - 5$ points du plan tel que pour tout triangle dont les sommets sont des points de A il existe au moins un point de S qui lui soit strictement intérieur.

Solution

Ce problème particulièrement difficile (c'est Johann YEBBOU qui m'a donné la solution, mais un candidat l'a trouvé dans le temps imparti et un autre peu après) repose pourtant sur deux idées simples : d'une part, pour prouver l'existence d'un ensemble de points, le mieux est généralement de construire cet ensemble. D'autre part, il est plus facile de positionner des points sur des droites que sur un plan. Sur quelles droites ? Sur combien de droites ?

Considérons pour commencer une droite (Δ) qui ne passe par aucun des points de A et ne soit orthogonale à aucun des segments liant deux points de A. Les n points de A se projettent donc orthogonalement sur (Δ) en n points distincts, que l'on peut numéroter dans l'ordre où ils se succèdent sur (Δ) : B_1, B_2, … B_n. On en déduit une numérotation des n points de A : $A_1, A_2, \dots, A_n$ telle que quels que soient i, j, k $(i < j < k)$, A_i et A_k soient situés de part et d'autre de la droite (A_jB_j), que nous appellerons (Δ_j).



Pour tout triangle $A_iA_jA_k$ $(i < j < k)$, la droite (Δ_j) coupe donc le segment $[A_iA_k]$ en un point $C^j_{i,k}$ distinct de A_j tel que tout point de $]A_j \; C^j_{i,k}[$ soit intérieur au triangle $A_iA_jA_k$. Pour un j fixé $(2 \leqslant j \leqslant n-1)$, envisageons tous les triangles $A_iA_jA_k$ possibles, donc tous les $C^j_{i,k}$ ainsi définis, et appelons d_j la plus petite distance $A_j\,C^j_{i,k}$. Soient M_j et N_j les points de (Δ_j), de part et d'autre de A_j, tels que $A_jM_j = A_jN_j = d_j/2$. Quels que soient i et k, $i < j < k$, l'un des points M_j ou N_j appartient à $]A_j \; C^j_{i,k}[$, donc est intérieur au triangle $A_iA_jA_k$.

Nous avons donc construit un ensemble F de points tel qu'à l'intérieur de tout triangle $A_iA_jA_k$ il y ait un point de F. Mais F n'est pas l'ensemble S cherché, car il contient $2n-4$ points, deux points par (Δ_j) pour $2 \leqslant j \leqslant n-1$. Il faut donc remarquer en outre que si A_j est un des sommets de l'enveloppe convexe de E, tous les points de (Δ_j) intérieurs à l'enveloppe convexe sont du même côté de A_j. L'un des points M_j ou N_j est donc extérieur à l'enveloppe convexe, donc extérieur à tout triangle $A_iA_jA_k$, et on peut l'exclure de notre ensemble F sans perdre la propriété requise. Comme l'enveloppe convexe de E a au moins trois sommets, donc au moins un en plus de A_1 et A_n, on peut exclure de F au moins un point, pour obtenir l'ensemble S cherché de $2n-5$ points.