Mathématiques ici et ailleurs

Puzzles géométriques

Stefan Turnau
Cracovie (Pologne)

Les démonstrations en forme de puzzles du théorème de Pythagore sont bien connues : les carrés sur les deux côtés de l'angle droit sont découpés en pièces qui servent pour reconstruire le carré sur l'hypoténuse. Les mathématiciens chinois utilisaient eux aussi le principe d'invariance des aires ou des volumes pour obtenir de nouvelles relations mathématiques. On pourrait organiser cela dans la classe comme un jeu de puzzle véritable : bon amusement et bonnes mathématiques en même temps. Mais c'est d'autres puzzles que je veux parler ici.

Leur invention m'a été inspirée par le livre "*Experiencing geometry*" de David W. Henderson (Prentice Hall 1996). Je les ai présentés aux élèves-professeurs dans des séances de géométrie et ils peuvent s'adapter à des élèves de tous âges. C'est l'exigence de formalisation qui variera selon le niveau de classe.

On sait que tout polygone peut être décomposé en pièces que l'on peut réarranger en un rectangle (on va dire "réarranger le polygone en rectangle") ; même en un rectangle d'un côté donné ; même en un carré ! On sait comment le démontrer : on coupe le polygone en triangles, chaque triangle réarrangé en parallélogramme, chaque parallélogramme en rectangle, chaque rectangle en rectangle d'un côté constant, on laisse glisser les rectangles ensemble - ça y est.

Mais que signifie "on peut décomposer" ? On sait bien comment le faire avec un parallélogramme "ordinaire", qu'on voit dans chaque manuel, pour en faire un rectangle de la même base et hauteur. Mais sais-tu comment le faire avec un parallélogramme long, étroit et bien penché ? Tu peux te souvenir de la démonstration déductive que *l'on peut* faire, mais tu ne sais probablement pas *comment*. Ce n'est qu'une "*monstration*" visuelle qui serait compréhensible et convaincante pour des collégiens. Alors c'est ce que nous allons rechercher.

Commençons en précisant notre problème. Nous voulons trouver une méthode constructive de découpage d'un parallélogramme quelconque telle que les pièces obtenues puissent être composées en un autre parallélogramme de même base et même hauteur. Cette méthode doit être réalisable avec du papier, des outils de dessin et des ciseaux. Comme le nombre de pièces peut être grand, on préfère une méthode algorithmique, n'utilisant que peut d'opérations simples répétables. Et finalement, *last but not least*, on voudrait voir pourquoi les pièces vont bien l'une avec l'autre, et pourquoi la figure composée est un vrai parallélogramme. "*Voir*" signifie pour moi sans avoir recours à une démonstration déductive (*).

Dialogue dans une classe

- *le professeur :* Une telle construction est celle de la figure 1. Mais avant de l'étudier, ne voudrais-tu pas la rechercher toi-même ? La tienne sera peut-être plus simple et plus élégante.

Réarranger un parallélogramme en un autre de même base et même hauteur.

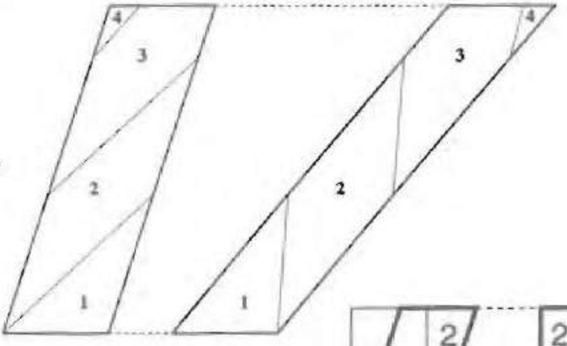

figure 1

- *l'élève :* Bien sûr, c'est en même temps une méthode de réarrangement d'un parallélogramme en rectangle. (figure 1')

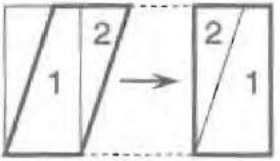

figure 1'

* N.D.L.R. : On peut d'ailleurs discuter cette pratique pédagogique, et nous attendons ici les réactions des collègues.

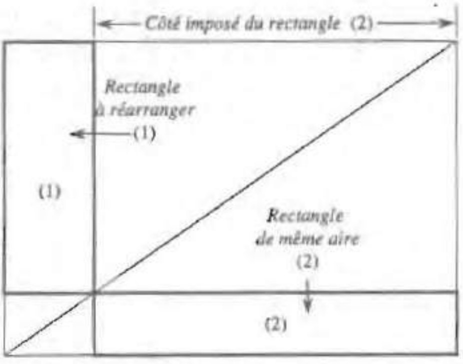

figure 2 : réarranger un rectangle en un autre dont l'un des côtés est donné.

Mais c'est presque aussi une méthode de réarrangement d'un rectangle en rectangle d'un côté donné d'avance, construit comme le montre la figure 2.

Il suffit de compléter la figure en un "grand rectangle" et de découper chaque rectangle nouvellement apparu en deux triangles rectangles de même aire. Cela nous donne deux parallélogrammes de même base et même hauteur avec qui on sait déjà se débrouiller. (figure 3).

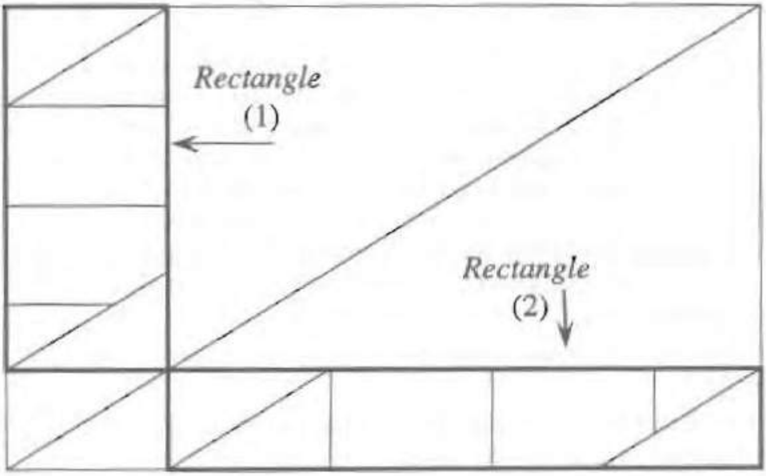

figure 3 : "monstration" du fait que les rectangles (1) et (2) ont la même aire.

- *le professeur :* Et comment réarranger un triangle en rectangle de la même base et deux fois moins haut ? Le fait qu'on peut du triangle faire un parallélogramme et puis réarranger ce dernier en rectangle n'est pas une réponse à notre question : les deux parties du triangle devraient être provisoirement collées, le parallélogramme découpé, et finalement les pièces, provisoirement collées, séparées. Non ce n'est pas ça. Le triangle doit être coupé tout d'abord ! Veux-tu te préoccuper de ce problème ?

- *l'élève :* Une construction que j'ai réussi à trouver est illustrée dans la figure 4.

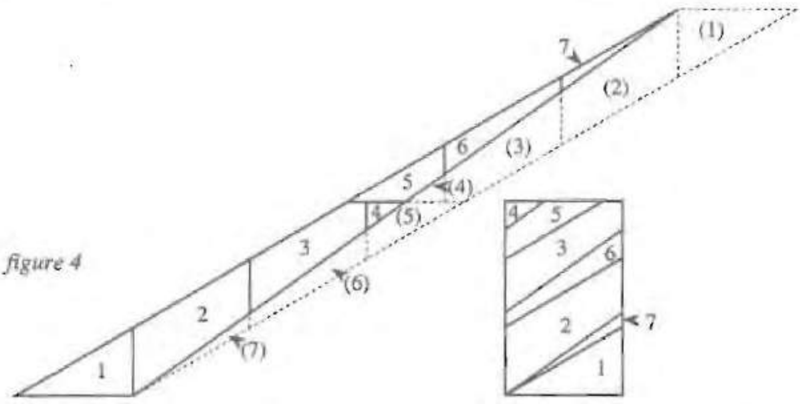

figure 4

On commence par découper le triangle horizontalement en deux parties, le long de la ligne liant les milieux des deux côtés, puis on taille chaque partie verticalement par des coupes perpendiculaires à la base, dont les distances mutuelles sont égales précisément à la longueur de la base, vers la ligne des milieux. En recomposant les pièces, il faut faire tourner les plus près du sommet de 180°. Pour voir pourquoi les pièces s'adaptent bien et que le quadrilatère obtenu est bien le rectangle voulu, il faut ajouter à la construction celle du triangle symétrique autour du milieu d'un côté avec ses lignes de découpe (en pointillés sur la figure 4)

- *le professeur :* Peut-on obtenir un découpage encore plus simple, plus élégant ?

Pourquoi donc les puzzles géométriques ne sont-ils pas un thème standard dans les programmes du collège ?

---

* NDLR : Outre l'ouvrage signalé par l'auteur en début d'article, un livre très documenté sur les puzzles géométriques vient de paraître :
"*Dissections, planes and fancy*" par Greg N. Frederickson - Editions Cambridge University Press - 310 pages - Format 18 × 24 - Cartonné - En anglais - Prix public : £19.95. N° ISBN : 0 521 197 9.