

Dans nos classes ***Lycées***

Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre : le cas de l'orthocentre

Roger Cuppens

IREM et DIEM, Université Paul Sabatier,
Toulouse

Dans la brochure "*Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre*" [Cuppens a], nous avons montré comment l'emploi d'un logiciel comme Cabri-Géomètre allié à une méthode "expérimentale" permet de conjecturer de nombreux résultats intéressants et de retrouver le sens originel de nombreuses notions mathématiques.

Entre temps, une nouvelle version Cabri II de Cabri-Géomètre est parue¹. L'arrivée de cette version renforce l'intérêt de cette méthode expérimentale : l'introduction de nouveaux outils² simplifie les constructions et permet d'aller plus loin dans les investigations.

Nous montrons ceci sur l'orthocentre. L'étude des variations de ce point remarquable en fonction des déplacements de l'un des sommets du triangle a

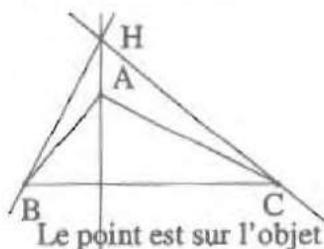
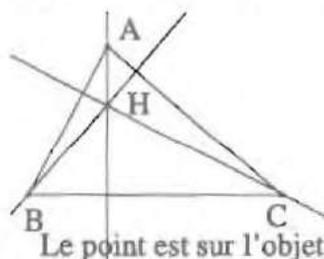
¹ Ainsi qu'une version affaiblie de cette dernière sur la calculatrice TI 92 : Cabri est donc disponible aux examens !

² On trouvera une première étude de cette version dans [Cuppens b].

été effectuée récemment par J. Fages [Fages] en utilisant la version PC de Cabri³. Nous montrons comment, avec Cabri II, on peut pousser plus loin cette étude. D'autre part, nous avons montré dans la brochure déjà citée que l'étude d'une transformation appelée inversion isogonale montrait l'existence d'un lien étroit entre l'orthocentre d'un triangle et les hyperboles équilatères circonscrites à ce triangle. Nous montrons comment l'introduction dans Cabri II d'un outil fournissant la conique passant par cinq points donnés permet une étude directe de ce lien.

I. Résultats élémentaires.

Pour vérifier avec Cabri que les hauteurs d'un triangle sont concourantes, il suffit de tracer les trois droites passant par l'un des sommets et perpendiculaires au côté opposé : on voit que les droites sont concourantes et que cette impression visuelle persiste pour tout déplacement de l'un des sommets. On peut aussi déterminer le point d'intersection de deux des hauteurs et demander à Cabri si ce point appartient à la troisième. La réponse est affirmative et reste affirmative après déplacement de l'un des sommets :



Bien entendu, ceci n'est qu'une affirmation d'un logiciel qui peut se tromper et ne dispense pas d'une démonstration.

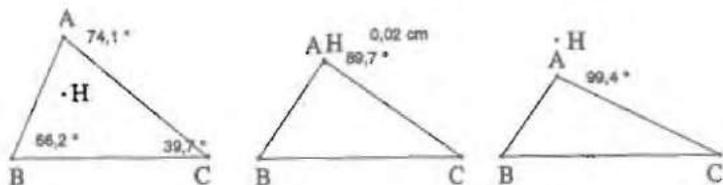
On peut alors définir une macro Orthocentre ayant pour objets initiaux les trois points A , B et C et pour objet final le point H . Quand on l'appliquera à trois points donnés, elle fournira automatiquement l'orthocentre sans tracer les trois hauteurs. En l'appliquant à un triangle ABC , on constate que l'orthocentre⁴ :

- est à l'intérieur du triangle ABC si les trois angles sont aigus,
- est presque confondu avec le point A si l'angle de sommet A est presque droit,

³ Elle s'appelait aussi "Le géomètre".

⁴ D. Bergue [Bergue] a montré comment ces résultats pouvaient être étudiés en classe de cinquième.

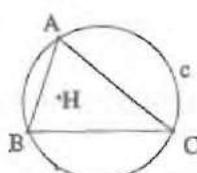
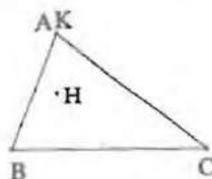
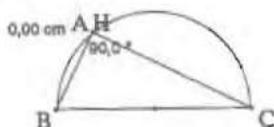
- est à l'extérieur du triangle ABC (et "au dessus" de A) si l'angle de sommet A est obtus.



Remarquons que, pour le deuxième cas, il est pratiquement impossible d'obtenir à la souris un angle droit ; pour ceci, on peut redéfinir le point A comme un point sur le cercle de diamètre BC et, dans ce cas, la distance AH est nulle.

En appliquant la macro Orthocentre aux points B , C et à l'orthocentre H du triangle ABC , on obtient un point K confondu avec le sommet A . On a donc vérifié un résultat évident dont nous verrons l'importance ci-dessous.

Traçons le cercle circonscrit⁵ c au triangle ABC et le symétrique A' de l'orthocentre H du triangle ABC par rapport à la droite (BC) . Si on interroge Cabri sur l'appartenance de H à c , Cabri répond que le point A' est sur le cercle c .



A' Le point est sur l'objet

Enfin, Cabri permet de vérifier le résultat suivant peut être un peu moins connu : si une transversale coupe (BC) en D , (CA) en E et (AB) en F , les orthocentres H , I , J et K des triangles ABC , AEF , BFD et CDE sont alignés.



2. Une application du plan dans lui-même.

Dans ce paragraphe, les points A et B sont fixes et nous étudions l'appli-

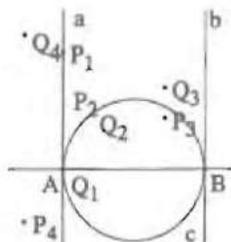
⁵ On peut, pour ceci, utiliser une macro, facile à utiliser.

cation qui, à un point P du plan, associe l'orthocentre Q du triangle PAB . Cette application est définie pour tout point P n'appartenant pas à la droite (AB) et, dans ce cas, le point Q appartient à la droite passant par P et perpendiculaire à la droite (AB) .

2.1. Transformé d'un point.

On déduit de ce qui précède que :

1. Si P appartient à la droite a (resp. b) passant par A (resp. B) et perpendiculaire à (AB) , alors Q est en A (resp. B).
2. Si P appartient au cercle c de diamètre $[AB]$ privé de A et B , alors Q coïncide avec P .
3. Si P appartient à la bande délimitée par les droites a et b et n'appartient pas au cercle c , alors le segment $[PQ]$ coupe le cercle c , mais ne coupe pas la droite (AB) .
4. Si P n'appartient pas à la bande délimitée par a et b , alors $[PQ]$ coupe la droite (AB) et évidemment ne coupe pas le cercle c .

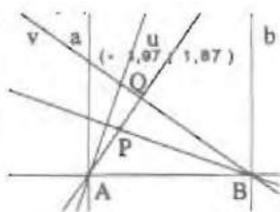


De plus, la restriction de l'application au plan privé des trois droites (AB) , a et b est une application involutive (c'est-à-dire dont le carré est l'identité), donc bijective.

Si on se place dans le plan projectif, on peut étudier les points à l'infini. Pour ceci, on peut utiliser la possibilité offerte par Cabri II de "gérer l'infini". Un premier exemple consiste à déterminer les coordonnées du transformé Q d'un point P situé sur la droite (AB) et ne coïncidant pas avec A ou avec B . Une réflexion a priori nous dit que, dans ce cas, les hauteurs u et v du triangle aplati PAB issues de A et B sont confondues avec a et b respectivement et leur point d'intersection serait donc à l'infini dans la direction perpendiculaire à (AB) .

Pour voir que Cabri montre bien ce phénomène, on peut

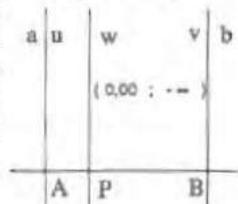
- prendre un point P en dehors de la droite (AB) ,
- tracer la droite u (resp. v) passant par A (resp. B) et perpendiculaire à la droite (PB) (resp. (PA)),
- déterminer le point d'intersection Q des droites u et v ⁶,



⁶ Une application directe de la macro Orthocentre est possible, mais elle ne fournirait pas les droites u et v qu'il est utile de visualiser pour l'étude du phénomène.

- calculer les coordonnées⁷ de Q et tracer la droite w passant par P et Q .

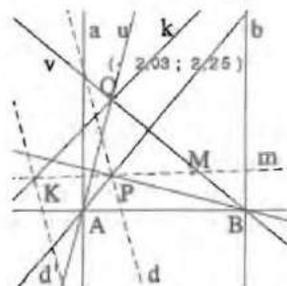
Si on redéfinit le point P comme un point sur la droite (AB) , on voit (figure de droite) que les coordonnées de Q sont devenues $(0, \infty)$, que les droites u et v sont confondues avec a et b et que la droite w est perpendiculaire à la droite (AB) : on voit que pour Cabri le transformé de P est bien à l'infini dans la direction perpendiculaire à (AB) ⁸.



On peut aussi déterminer le transformé d'un point P à l'infini dans une direction d non perpendiculaire à la droite (AB) . Dans ce cas, les droites (PA) et (PB) sont parallèles à d et les hauteurs u et v du "triangle généralisé" PAB issues des sommets A et B sont perpendiculaires à d . Les droites u et v sont donc parallèles et distinctes (puisque d n'est pas perpendiculaire à (AB)). Le transformé du point P est donc le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à d .

Pour vérifier ceci avec Cabri, se donnant les points A et B et la droite d , on peut (figure de gauche) :

- prendre deux points K et M ,
- déterminer le point d'intersection P de la droite d et de la droite m passant par les points K et M ,
- tracer la droite u (resp. v) passant par A (resp. B) et perpendiculaire à la droite (PB) (resp. (PA)),
- déterminer le point d'intersection Q des droites u et v ,
- calculer les coordonnées du point Q et tracer la droite k passant par K et Q ,
- tracer la droite d' passant par le point K et parallèle à d .



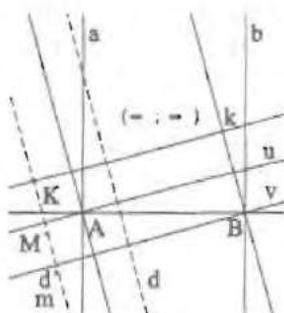
Puis on redéfinit le point M comme un point sur d' : le point P devient le point à l'infini dans la direction d .

⁷ L'outil "Coord. & Equation" fournit automatiquement les coordonnées dans un système d'axes. Ici le système d'axes est un système "par défaut" que l'on peut faire apparaître avec l'outil "Montrer les axes".

⁸ Seule la valeur 0 pour l'abscisse du point Q semble arbitraire. On pourra remarquer que les coordonnées et la droite w disparaissent si on supprime "Gestion de l'infini" dans l'outil "Défauts..." du menu "Options".

On voit (figure de droite) que les coordonnées du point Q sont devenues (∞, ∞) et que les droites u , v et k sont devenues perpendiculaires à d : pour Cabri, le point Q est donc le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à d .

Remarque. En déplaçant la droite d , on constate que le résultat reste vrai lorsque d est parallèle à (AB) et que, par contre, les coordonnées du point Q et la droite k disparaissent lorsque d est perpendiculaire à (AB) .



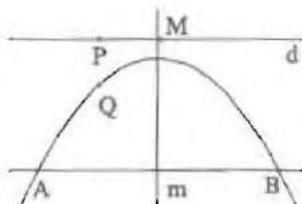
2.2. Transformé d'une droite.

De ce qui précède, on déduit que :

1. L'image de la droite a (resp. b) est le point A (resp. B).
2. Si d est une droite perpendiculaire à (AB) différente de a et de b , alors d est globalement invariante par la transformation.
3. Si d passe par le point A (resp. B) et n'est pas perpendiculaire à (AB) , l'image de d est la droite passant par B (resp. A) et perpendiculaire à d .

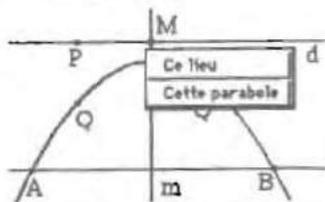
Nous examinons les autres cas :

Si d est une droite parallèle à (AB) , le lieu de Q quand P parcourt d est une courbe passant par A et B et symétrique par rapport à la médiatrice m de $[AB]$: on peut penser à une parabole.



Pour renforcer cette conviction, on peut remarquer que cette courbe a une seule direction asymptotique, la perpendiculaire à la droite (AB) .

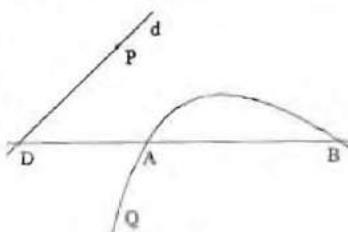
On peut aussi prendre le symétrique Q' du point Q par rapport à m et l'image S du point d'intersection M de m et de d (figure ci-contre). Cabri II fournit la conique qui passe par les cinq points A , B , S , Q et Q' : on constate qu'elle coïncide pratiquement avec Q le lieu précédent. En approchant le curseur de ces courbes, on constate que Cabri nous dit que c'est une parabole m .



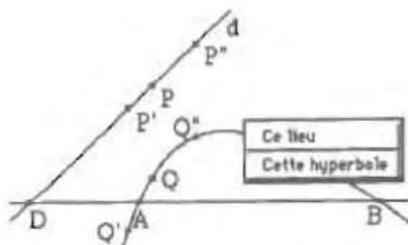
Que peut-on penser de cette affirmation ? Si on trace la conique passant par cinq points quelconques du plan, on constate qu'il est pratiquement

impossible de trouver une parabole, une hyperbole équilatère ou une "ellipse circulaire"⁹. On peut donc penser que la précision des calculs effectués par le logiciel donne un certain crédit à cette affirmation. Mais ceci ne dispense pas d'une démonstration que l'on trouvera par exemple dans [Fages].

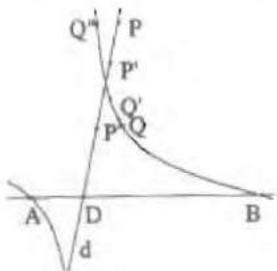
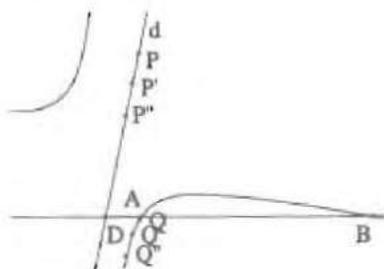
Si la droite d coupe (AB) en un point D différent de A et de B et n'est pas perpendiculaire à (AB) , on obtient de même que le lieu de Q quand P parcourt d est une courbe ayant deux directions asymptotiques perpendiculaires respectivement à d et à (AB) .



On peut penser à une hyperbole, ce que Cabri affirme de la même manière.



On remarque que si la droite d est peu inclinée sur (AB) , on n'a à l'écran qu'une branche de l'hyperbole et que la position de l'hyperbole est différente suivant que D appartient ou non au segment $[AB]$: les points A et B appartiennent à la même branche si D est à l'extérieur de $[AB]$ et à des branches différentes si D est à l'intérieur de $[AB]$.



2.3. Transformé d'un cercle.

Les considérations de [Fages] montrent que le transformé d'un cercle c quelconque (et plus généralement d'une conique) est une quartique dont on

⁹ C'est la terminologie utilisée par Cabri II. Comme je l'ai déjà signalé dans [Cuppens b], elle me semble particulièrement malencontreuse pour un débutant.

trouvera diverses formes dans cet article. Ce n'est que quand le cercle passe par A et par B que le transformé de c est un cercle.

On peut penser que lorsque c passe par un de ces points, le transformé est une cubique, mais on n'a à ma connaissance aucun moyen de le vérifier avec la version actuelle de Cabri.

3. Hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.

En utilisant une transformation appelée inversion isogonale, nous avons abordé dans le Chapitre 11 de [Cuppens a] l'étude des coniques (et en particulier des hyperboles équilatères) circonscrites à un triangle. Nous montrons maintenant comment les nouveaux outils de Cabri II permettent d'améliorer cette étude.

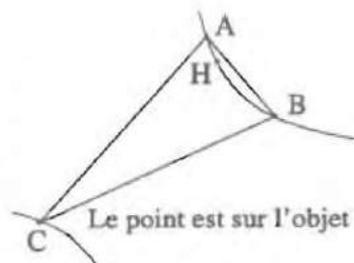
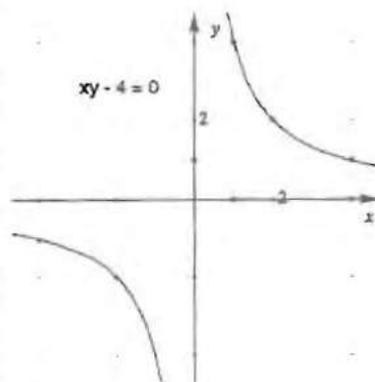
3.1. Propriété fondamentale.

Traçons avec Cabri II une hyperbole équilatère.

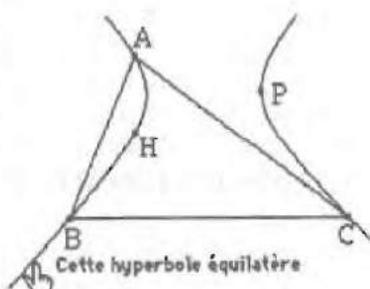
Une méthode élémentaire pour ceci consiste à utiliser l'outil "Grille" qui fournit les points à coordonnées entières dans le système d'axes "par défaut" (que l'on peut faire apparaître avec l'outil "Montrer les axes"). On trace alors les points de coordonnées $(1,4)$, $(2,2)$, $(4,1)$, $(-1,-4)$ et $(-4,-1)$. Avec l'outil "Conique", on trace la conique passant par ces cinq points et Cabri nous dit que l'on a une hyperbole équilatère dont l'équation est $xy = 4$.

On peut alors effacer la grille et les axes et prendre trois points A , B et C sur cette hyperbole équilatère. En appliquant la macro Orthocentre à ces trois points, on constate que l'orthocentre H du triangle ABC semble être sur l'hyperbole équilatère, ce que confirme Cabri II.

Ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Brianchon-Poncelet (cf., par exemple, [Collet & Grison], p. 46).



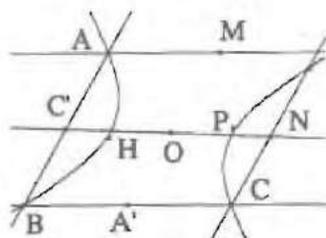
Pour examiner la réciproque, on trace quatre points quelconques A , B , C et P et on note H le point obtenu en appliquant la macro Orthocentre à A , B et C . Cabri II affirme bien que la conique passant par les cinq points A , B , C , H et P est une hyperbole équilatère.



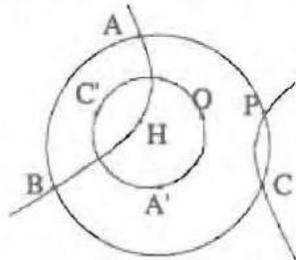
On remarquera que, bien que nous ayons dit plus haut qu'obtenir une hyperbole équilatère est un phénomène rare, les coniques passant par trois points A , B et C et par l'orthocentre H du triangle ABC forment une famille d'hyperboles équilatères¹⁰. Puisque l'intersection d'une conique et d'un cercle contient au plus quatre points, une hyperbole de la famille sera caractérisée par son intersection avec le cercle circonscrit du triangle ABC . On tracera donc ce cercle et on redéfinira P comme point sur ce cercle.

3.2. Lieu des centres.

Déterminons maintenant le centre O de cette hyperbole. Pour ceci, on peut utiliser la propriété des diamètres : les milieux des cordes parallèles à une direction donnée appartiennent à une droite passant par le centre de l'hyperbole. Il suffit donc de déterminer le milieu A' (resp. C') de $[BC]$ (resp. $[AB]$) et le milieu M (resp. N) de la corde passant par A (resp. C) et parallèle à $[BC]$ (resp. $[AB]$). Le centre O est le point d'intersection des droites $(A'M)$ et (CN) .



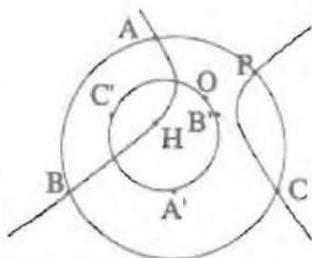
En demandant à Cabri de tracer le lieu du point O quand P parcourt le cercle circonscrit au triangle ABC , on obtient une courbe qui semble un cercle passant par les points A' et C' ; ce serait donc le cercle d'Euler du triangle ABC .



¹⁰ Puisqu'on obtient facilement dans Cabri l'orthocentre d'un triangle, ceci est sans doute la méthode la plus simple pour obtenir dans Cabri II une hyperbole équilatère.

Pour conforter ceci, on détermine le milieu B' de $[AC]$ et on demande à Cabri si le point O appartient au cercle circonscrit à A' , B' et C' . La réponse est affirmative.

On trouvera une démonstration de ce résultat dans [Collet & Griso], p. 47.

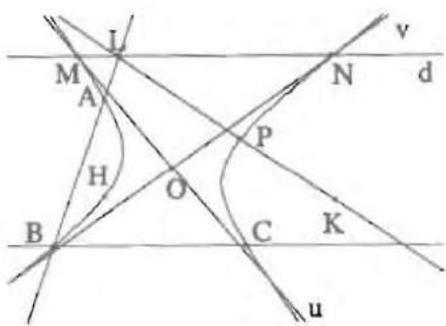


Le point est sur l'objet

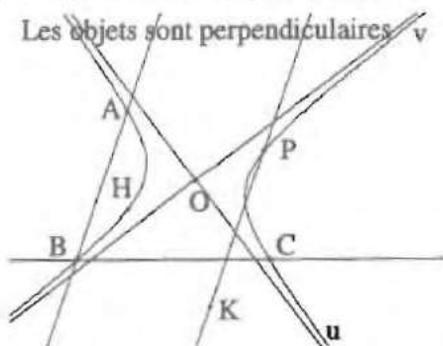
3.3. Enveloppe des asymptotes.

Traçons maintenant les asymptotes de l'hyperbole. Pour ceci, on peut utiliser la possibilité offerte par Cabri II de "gérer l'infini". On déterminera donc successivement :

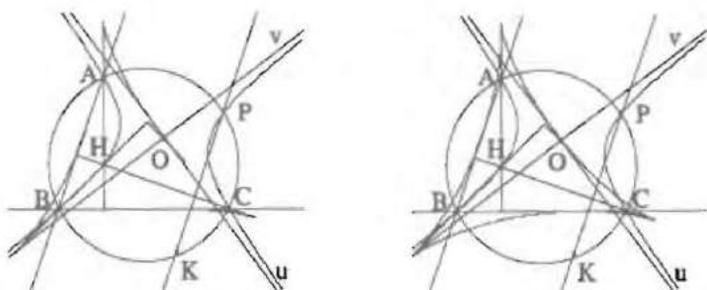
- un point quelconque K ,
- le point d'intersection L des droites (AB) et (KP) ,
- la droite d passant par L et parallèle à (BC)
- les points d'intersection M et N de d avec l'hyperbole équilatère,
- les droites u et v passant par O et par les points M et N respectivement.



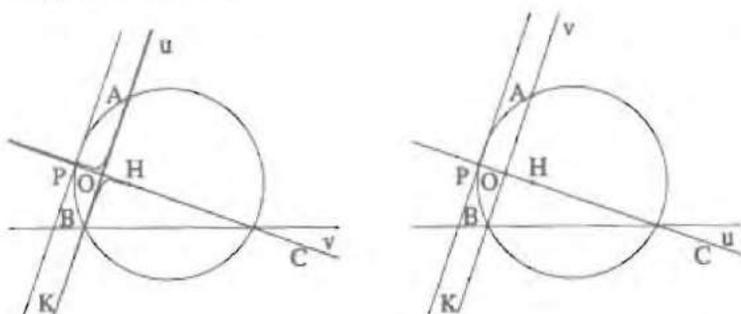
On redéfinit alors le point K comme un point sur la droite passant par P et parallèle à (AB) . Le point L devient alors le point à l'infini dans la direction (AB) et la droite d devient la droite de l'infini. Les droites u et v sont alors les asymptotes cherchées et on peut vérifier qu'elles sont bien orthogonales.



Pour obtenir l'enveloppe de ces asymptotes, il suffit d'appliquer l'outil Lieu à la droite u et au point P . On obtient une courbe assez irrégulière (figure de gauche ci-après) que l'on peut compléter avec le lieu de la droite v (figure de droite).

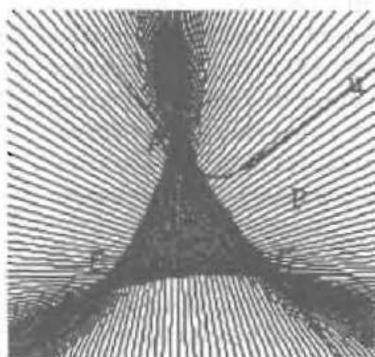


On reconnaît une hypocycloïde à trois rebroussements ou deltoïde. Pour expliquer les segments "parasites", il suffit de remarquer qu'il y a plusieurs ruptures de continuité dans la dénomination des droites u et v lorsque P traverse l'une des droites (HA) , (HB) ou (HC) ; elles correspondent à des échanges de dénomination des points d'intersection M et N de la droite de l'infini avec l'hyperbole. Cabri joint alors les points correspondants de l'enveloppe par un segment.



Une autre méthode pour obtenir l'enveloppe consiste à demander la trace des droites u et v . Pour obtenir une trace régulière, on peut appliquer l'outil "Animation" au point P , ce qui donne bien une courbe ayant l'allure d'une deltoïde.

On obtient bien une courbe ressemblant à une deltoïde. On trouvera une démonstration de ce résultat dans [Collet & Griso], p. 49.

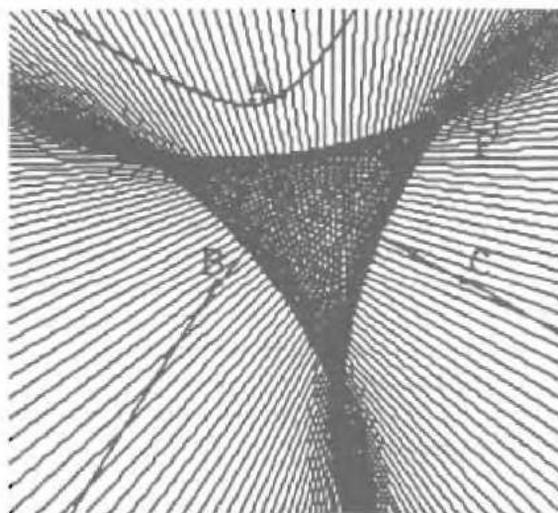
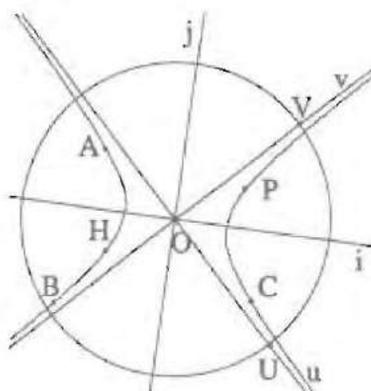


3.4. Enveloppe des axes.

Tracer les axes d'une hyperbole à partir des asymptotes u et v peut sembler facile puisque ce sont les bissectrices des droites u et v . Mais Cabri II ne trace *a priori* que les bissectrices d'angles définis par trois points. Or il s'avère impossible de prendre des points sur les droites u et v : ceci est dû au fait que ces droites ont été définies comme passant par un point à l'infini.

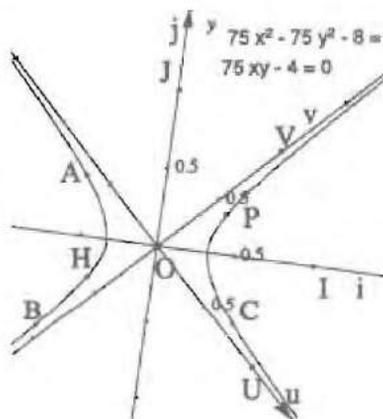
On va donc tracer un cercle auxiliaire de centre O qui coupe u et v en U et V respectivement. La bissectrice i de \widehat{UOV} et la droite j passant par O et perpendiculaire à i sont les axes cherchés.

Avec les méthodes du paragraphe précédent, on peut vérifier que l'enveloppe des axes semble être de nouveau une deltoïde.



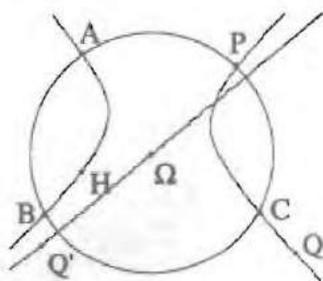
Remarque. Nous avons vu précédemment que Cabri fournit les coordonnées d'un point et l'équation des droites, des cercles et des coniques dans un système d'axes "par défaut" que l'on peut faire apparaître avec l'outil "Montrer les axes". Un outil "Nouveaux axes" permet de définir un nouveau système

d'axes : en l'appliquant aux point O , U et V , on obtient le système d'axes correspondant au repère (O, U, V) . Dans ce système, on peut vérifier que l'équation de l'hyperbole équilatère est de la forme $xy = k$. De même, en déterminant des points j et J communs au cercle et aux droites i et j respectivement, on obtient que l'équation de cette même hyperbole dans le repère (O, I, J) ¹¹ est de la forme $x^2 - y^2 = 2k$.



3.5. Hyperbole équilatère et inversion isogonale.

Pour retrouver les résultats du Chapitre 11 de [Cuppens a], il suffit de prendre un point Q sur l'hyperbole équilatère passant par A , B , C , H et P et de déterminer l'isogonal¹² Q' du point Q par rapport à A, B et C . On vérifie que le lieu de Q' quand Q varie est une droite passant par le centre Ω du cercle circonscrit à A, B et C .



Pour aller plus loin, on détermine les points d'intersection M et M' de la droite passant par Q et Q' avec le cercle circonscrit. On vérifie alors que les droites de Simson de M et M' coïncident respectivement avec les droites u et v .

On peut donc conjecturer que ces droites de Simson sont les asymptotes de l'hyperbole et que l'enveloppe des asymptotes obtenue ci-dessus est la deltoïde enveloppe des droites de Simson du triangle ABC obtenue dans le Chapitre 10 de [Cuppens a].

¹¹ On voit que plusieurs systèmes d'axes peuvent être définis et utilisés simultanément, ce qui peut être intéressant pour étudier le problème des changements d'axes.

¹² On trouvera la macro adéquate dans [Cuppens a].

4. Conclusion.

On voit que les nouveaux outils fournis par Cabri II, sans remettre en cause les principes de la méthode expérimentale exposée dans [Cuppens a] permettent une étude plus fouillée. En particulier, l'introduction des coniques augmente considérablement le champ d'étude. Il en est de même de la possibilité d'obtenir l'équation de certaines courbes, de l'introduction des vecteurs et de certaines transformations. D'autre part, la possibilité de "gérer l'infini" doit permettre des incursions importantes dans le domaine de la géométrie projective.

Bibliographie

[Bergue] Danielle BERGUE. Une utilisation du logiciel "Géomètre" en 5ème. Dans "Apports de l'outil informatique à l'enseignement de la géométrie. Commission Inter-IREM Mathématiques et Informatique, 1994. pp. 35-42.

[Collet & Griso] Michel COLLET et Georges GRISO. Le cercle d'Euler. Vuibert, 1987.

[Cuppens a] Roger CUPPENS. Faire de la géométrie en jouant avec CABRI-GÉOMÈTRE. Tomes I et II. Brochures n° 104 et 105 de l'APMEP (1996).

[Cuppens b] Roger CUPPENS. De Cabri I à Cabri II : quelques problèmes épistémologiques et didactiques. A paraître dans les Actes de l'Université d'été "Cabri Géomètre, de l'ordinateur à la calculatrice. De nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie", Grenoble, juillet 1996.

[Fages] Jean FAGES. Faisons bouger les centres. Bulletin de l'APMEP n° 405 (juin-juillet 1996), pp. 423-434.

[Trgalova] Jana TRGALOVA. Étude historique et épistémologique des coniques et leur implémentation informatique dans le logiciel Cabri-Géomètre. Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, octobre 1995.

