Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc. L'anonymat de ceux qui le demandent est conservé.
Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune et, si possible, une disquette Mac ou PC (avec enveloppe affranchie pour son retour immédiat) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS
Internet : rferreol@club-internet.fr

Nouveaux avis de recherche

Avis de recherche n° 95 de Philippe JACQUEMIER (Domène)

P. Jacquemier reprend le sujet de l'énoncé 83 (*les 200 problèmes de l'APMEP*, volume III, page 33).

Il existe 92 160 façons de remplir un carré 6 × 6 avec les entiers de 1 à 6 de sorte que chacun d'eux paraisse dans chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale.

De plus on peut montrer que dans toute solution, par exemple :

6	1	2	4	3	5
4	5	1	3	6	2
2	6	3	1	5	4
5	3	4	2	1	6
1	2	6	5	4	3
3	4	5	6	2	1

une médiane M du carré a une propriété que l'autre n'a pas :

a) Si *a* est sur une diagonale et a pour symétrique *b* par rapport à M, l'entier *b* qui se trouve sur cette diagonale a pour symétrique *a*.

b) Les lignes ou colonnes perpendiculaires à M se répartissent par deux, les éléments de l'une étant dans l'ordre inverse des éléments de l'autre.

Qu'ne médiane se distingue de l'autre, cela peut surprendre car rien ne le laissait supposer dans l'énoncé.

Avis de recherche : **des situations comme celles-ci où paraît un défaut d'isotropie qui n'est présent dans aucune des données, mais qui l'est dans leur conjonction.**

Réponses aux avis précédents

Avis de recherche n° 76

On aimerait prolonger une droite de l'autre côté d'un obstacle infranchissable mais contournable, à l'aide d'une règle non graduée. J'ai trouvé une construction utilisant 14 droites intermédiaires. Peut-on faire mieux ?

Plusieurs réponses ont été données à ce problème. En voici quelques-unes. Tout d'abord celle d'Eric KERMORVANT (Gargenville) à l'origine de l'avis de recherche, et qui utilise 14 droites intermédiaires.

Construction :

1 - Choisir un point S dans le demi-plan limité par D qui ne contient pas la base de l'obstacle.

2 - Choisir un point A de D.

3 - Tracer deux droites D_1 et D_2 passant par A (en évitant S et l'obstacle).

4 - Tracer D_5 et D_6 passant par S et se trouvant au-delà de l'obstacle.

6 - Tracer le segment ayant pour extrémités $D_2 \cap D_3$ et $D_2 \cap D_4$.

7 - Tracer le segment ayant pour extrémités liés $D \cap D_3$ et $D \cap D_4$.

8 - Ces deux segments se coupent en un point. Tracer D_7, la droite qui passe par ce point et par A.

9 - Tracer les deux segments d'extrémités $D_1 \cap D_6$ et $D_2 \cap D_5$ puis $D_2 \cap D_6$ et $D_1 \cap D_5$.

10 - Ces deux derniers segments se coupent en un point qui nous permet de tracer D_8 en le joignant à S.

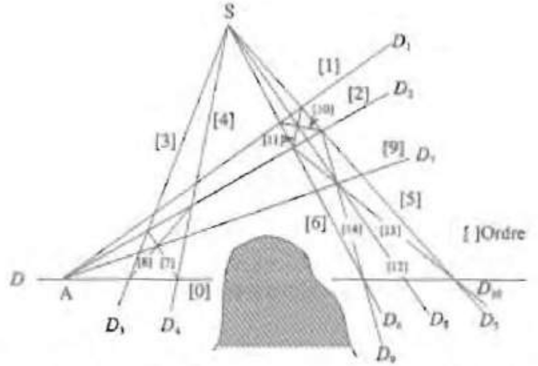
11 - D_7 et D_8 se coupent en un point qui va nous donner D_9 en le joignant à

$D_2 \cap D_5$; et D_{10} en le joignant à $D_2 \cap D_6$.

12 - Il suffit de tracer la droite passant par $D_6 \cap D_9$ et $D_5 \cap D_{10}$ pour obtenir le prolongement de D.

Justification : Utiliser la géométrie projective en projetant à l'infini la droite (AS), ce qui ramène la figure à un ensemble de parallélogrammes (toutes les droites qui se coupaient en S devenant parallèles ; de même pour celles qui se coupaient en A) où le résultat est alors évident à montrer.

Intérêt de cette méthode : les points qui permettront de prolonger la droite D sont "prédéfinis" et appartiennent à deux droites choisies dès le début de la construction.



Deux autres constructions ont été données par Jacques FORT (Poitiers) utilisant moins de droites intermédiaires :

Première construction avec 12 droites intermédiaires, utilisant le théorème de Desargues.

Construction :

1 - Choisir deux points a et b sur la portion connue de la droite D à prolonger, et deux points C et C' dans le demi-plan limité par D et qui ne contient pas la base de l'obstacle.

2 - Tracer les 4 droites (Ca), (Cb), $(C'a)$ et $(C'b)$. Choisir un point B sur (Ca) et un point B' sur $(C'a)$.

4 - Tracer les deux droites $BB')$ et (CC') ; elle se coupe en O.

5 - Choisir un point A sur (Cb). Tracer la droite (OA), elle coupe $(C'b)$ en A'.

6 - Tracer les deux droites (AB) et $(A'B')$. Elles se coupent en c, premier point de D au delà de l'obstacle.

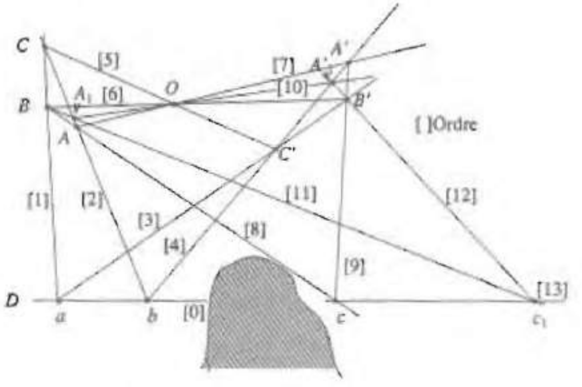
7 - Choisir un autre point A_1 sur (Cb). Tracer la droite (OA_1), elle coupe $(C'b)$ en A'_1.

8 - Tracer les deux droites (A_1B) et (A'_1B') ; elles se coupent en c_1, deuxième

point de D au-delà de l'obstacle.

Justification :

Les triangles ABC et ABC' vérifient les conditions du théorème de Desargues, par suite, les points a, b et c sont alignés.



Deuxième construction nécessitant 11 droites intermédiaires et utilisant la polaire d'un point par rapport à deux droites sécantes.

Construction :

1 - Choisir deux points O et a sur la portion connue de la droite D à prolonger.

2 - Tracer deux droites $x'Ox$ et $y'Oy$ passant par O, au dessus de l'obstacle.

3 - Tracer deux droites (aBC') et (aCB') passant par a et qui coupent $x'Ox$ et $y'Oy$ en B et C' pour la première de ces droites, en C et B' pour la deuxième.

4 - Tracer les deux droites (BB') et (CC') - elles se coupent en P. Le point a appartient alors à la polaire de P par rapport à $x'Ox$ et $y'Oy$. Ainsi $D = (Oa)$ est cette polaire.

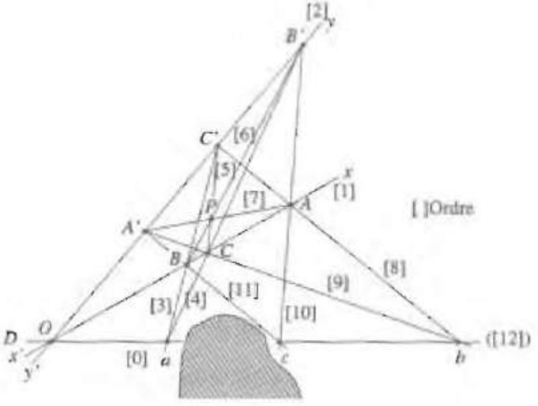
5 - Tracer une droite passant par P et qui coupe $x'Ox$ et A et $y'Oy$ en A'.

6 - Tracer les deux droites (CA') et (AC') ; elles se coupent en b, troisième point de la polaire $D = (Oa)$.

7 - Tracer les deux droites (AB') et (BA') ; elles se coupent en c, quatrième point de la polaire $D = (Oa)$ de P par rapport à $x'Ox$ et $y'Oy$.

Justification :

Les quatre points O, a, b, c sont sur la polaire D de P par rapport aux droites $x'Ox$ et $y'Oy$.



D'autres solutions ont été données (Michel CARRAL (Toulouse), Martin GERBAUX (Baron)), toujours en utilisant le théorème de Desargues ou les polaires, mais sans restreindre le nombre de droites intermédiaires. Il est à noter que l'une d'elles n'utilise que 10 droites intermédiaires, mais contourne l'obstacle des deux côtés.

Avis de recherche n°84

Problème des bœufs de Newton : **"sachant que n_1 (= 75) bœufs ont brouté en T_1 (= 12) jours l'herbe d'un pré de S_1 (= 60) ares et que n_2 (= 81) bœufs ont brouté en T_2 (= 15) jours l'herbe d'un pré de S_2 (= 72) ares, on demande le nombre n_3 de bœufs nécessaires pour brouter en T_3 (= 18) jours l'herbe d'un pré de S_3 (= 96) ares. On suppose que dans les trois pré, l'herbe est à la même hauteur au moment de l'entrée des bœufs, et qu'elle continue de croître uniformément depuis leur entrée."**

La réponse donnée dans les livres conduit à la relation :

$$\frac{n_1 T_1}{S_1}(T_2 - T_3) + \frac{n_2 T_2}{S_2}(T_3 - T_1) + \frac{n_3 T_3}{S_3}(T_1 - T_2) = 0$$

ce qui conduit à $n_3 = 100$.
Qu'en pensez-vous ?

Voici la traduction du texte initial de Newton en latin, que Jean-Pierre LE GOFF (IREM de Basse-Normandie) a réalisée et m'a envoyée.

"Si les n_1 bœufs paissent le pré de taille S_1 en un temps T_1 alors, par analogie [i.e. par égalité de raisons], $\frac{S_2}{S_1} n_1$ bœufs, dans un même temps T_1, ou $\frac{S_2 T_1}{S_1 T_2} n_1$ bœufs, dans le temps T_2, ou encore $\frac{S_2 T_1}{S_1 T_3} n_1$ bœufs dans le temps T_3, paîtront un pré de taille S_2, étant supposé que l'herbe n'a pas poussé après que le temps T_1 se soit écoulé. Mais comme, l'herbe repoussant, des bœufs en nombre n_2 paissent seulement un pré de taille S_2 en un temps T_2, il s'ensuit que l'accroissement de l'herbe dans un champ de taille S_2 sera tel, dans le temps $T_2 - T_1$, qu'il suffit par lui-même à la pâture de bœufs en nombre $n_2 - \frac{S_2 T_1}{S_1 T_2} n_1$ pendant le temps T_2, c'est-à-dire qu'il suffit à la pâture de bœufs en nombre $\frac{T_2}{T_3} n_2 - \frac{S_2 T_1}{S_1 T_3} n_1$ pendant le temps T_3. Et en un temps $T_3 - T_1$, par analogie [de raisons], l'accroissement sera tel qu'il suffise par lui-même à la pâture de bœufs dont le nombre sera le produit de $\frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1}$ par $\frac{T_2}{T_3} n_2 - \frac{S_2 T_1}{S_1 T_3} n_1$, soit $\frac{(T_3 - T_1)(S_1 T_2 n_2 - S_2 T_1 n_1)}{(T_2 - T_1) S_1 T_3}$. Cet accroissement [d'herbe] augmente le nombre de bœufs $\frac{S_2 T_1}{S_1 T_3} n_1$ et produit le nombre $\frac{(T_3 - T_1) S_1 T_2 n_2 + (T_2 - T_3) S_2 T_1 n_1}{(T_2 - T_1) S_1 T_3}$ (??) de bœufs auxquels suffit la pâture d'un pré de taille S_2 pendant le temps T_3. Adoncques, par analogie [de raisons], un pré de taille S_3 suffira à la pâture d'un nombre de bœufs égal à

$$n_3 = \frac{(T_3 - T_1) S_1 T_2 n_2 + (T_2 - T_3) S_2 T_1 n_1}{(T_2 - T_1) S_1 T_3} \frac{S_3}{S_2} \ (= 100)$$

pendant le temps T_3."

Cher collègue, j'espère que vous avez compris, car personnellement, je décroche à l'endroit où j'ai rajouté des points d'interrogation.

L'expression de n_3 donnée par Newton conduit bien à la relation

$$(1) \quad \frac{n_1 T_1}{S_1}(T_2 - T_3) + \frac{n_2 T_2}{S_2}(T_3 - T_1) + \frac{n_3 T_3}{S_3}(T_1 - T_2) = 0$$

annoncée, dont j'ai remarqué qu'elle pouvait se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{n_2T_2}{S_2}-\frac{n_1T_1}{S_1}\right)\frac{T_2}{(T_2-T_1)\,S_2}=\left(\frac{n_3T_3}{S_3}-\frac{n_1T_1}{S_1}\right)\frac{T_3}{(T_3-T_1)\,S_3}$$

mais je n'arrive pas non plus à justifier cette dernière relation.

Voici ma solution qui utilise le calcul différentiel inventé par Newton… ;

Mon hypothèse est que

$$\mathbf{s(t + dt) = s(t) - nv\ dt + ks(t)\ dt}$$

où s (t) est la surface non broutée à l'instant t d'un champ donné, n est le nombre de bœufs broutant ce champ, v la surface broutée par un bœuf par unité de temps (autrement dit, la vitesse de broutage) et k le coefficient de repousse de l'herbe.

On aboutit à l'équation différentielle : $\frac{ds}{dt} - ks = -nV$

qui s'intègre en : $s = \lambda e^{kt} + n\frac{v}{k}$; en notant S = s (0) et T le temps de tonte total, $\lambda = S - n\frac{v}{k}$ et S (T) = 0 donnent :

$kSe^{kT} = nv\,(e^{kt} - 1)$, ou : $\mathbf{kS = nv\,(1 - e^{kT})}$, ou encore : $v = \frac{S}{nT} \times \frac{kT}{1 - e^{-kT}}$

La relation (2) entre n_1, n_2, n_3, T_1, T_2, T_3, S_1, S_2, S_3 provient donc de l'élimination de k et de v entre les trois équations : $\mathbf{kS_i = n_i\,v\,(1 - e^{-kT_i})}$ pour i = 1, 2, 3.

Avec les données numériques, jobtiens : $\begin{cases} 60\,k = 75v\left(1 - e^{-12k}\right) \\ 72\,k = 81v\left(1 - e^{-15k}\right) \end{cases}$

J'en tire $\frac{1 - e^{-12k}}{1 - e^{-15k}} = 0{,}9$ d'où k = 0,100 62… j^{-1} (chaque ~~seconde~~ jour, la pousse de l'herbe équivaut à rajouter au champ un dixième de sa surface ; cela me paraît beaucoup…) et v = 0,114 8… ares/jour (soit 11 m^2 par jour : plausible).

Alors : $n_3 = \frac{96\,k}{v\left(1 - e^{-18\,k}\right)}$ = 100,56 … bœufs

Ce résultat est trop proche de celui de Nerwton pour qu'il n'y ait pas un rapport entre les relations (1) et (2).

Quel est-il ?